IDENTITÀ

DEL

CALCOLO DIFFERENZIALE

CON QUELLO DELLE SERIE

OVVERO

IL METODO DEGLI INFINITAMENTE PICCOLI DI LEIBNIZIO
SPIEGATO E DIMOSTRATO COLLA TEORIA
DELLE FUNZIONI DI LAGRANGE;

MEMORIA

DI

ANTONIO COLLALTO

FU PROFESSORE DI MATEMATICA E FISICA NELLE SCUOLE PUBBLICHE DI VENEZIA ED UNO DEGLI ESAMINATORI PER LA CLASSE DI MATEMATICA NELLE SCUOLE DI ARSENALE E MARINA.

IN MILANO MDCCCII.

DALLA STAMPERIA DI GIUSEPPE GALEAZZI.

« Le rapprochement des méthodes sert à les éclairer mutuellement, & ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent leur vrai métaphysique. »

LAPLACE.

PREFAZIONE

Leibnizio doveva avere certamente delle idee eſatte ſul vero ſpirito del Calcolo differenziale, del quale era egli ſteſſo uno degli inventori; ma egli ſi contentò di dare ſolamente le regole, e traſcurò interamente di dimoſtrare come e perchè i principj degli infinitamente piccoli conducono a quei tali riſultati. Il ſuo ſilenzio fu imitato dai primi che ſcriſſero dopo di lui, come dai Bernoulli e dall' Hopital. Alcuni dei noſtri moderni cercarono di dimoſtrare queſte regole e queſti principj; ma biſogna convenire che neſſuno abbia finora colto perfettamente nel ſegno, talchè il calcolo differenziale trattato alla maniera di Leibnizio, nonoſtante a tutte le dilucidazioni date dappoi, non porta ancora per certo quell' impronta di rigoroſa evidenza, che caratterizza tutte le altre quiſtioni geometriche.

D' Alembert ed Eulero hanno cercato di ſoſtituire altri principj a quello degli infiniteſimi. Il primo impiegò il metodo dei limiti, ed il ſecondo conſiderò gli infiniteſimi come zeri aſſoluti; ma però tali che conſervano un rapporto derivato da quello che

le quantità ſvanite avevano tra loro. Non ſi può negare che queſte idee non ſieno giuſte in ſe ſteſſe, ma certamente eſſe non ſono per lo meno tanto chiare che baſtino per ſervire di principio ad una ſcienza, la cui certezza è fondata ſull' evidenza, e ſoprattutto per eſſere preſentate a' principianti.

Lagrange dimoſtrò il primo in una Memoria preſentata all' accademia di Berlino l'anno 1772, che il Calcolo differenziale poteva eſſere trattato d' una maniera puramente analitica, indipendentemente da ogni altra conſiderazione, ed ha dimoſtrato il celebre Teorema di Tailoro, che ſi può conſiderare come il principio fondamentale di queſto Calcolo. Queſto teorema non ſi dimoſtrava prima di lui ſe non col ſoccorſo dello ſteſſo Calcolo degli infiniteſimi, o colla conſiderazione delle differenze infinitamente piccole.

Arbogaſt ha letto una Memoria all' accademia delle Scienze di Parigi l' anno 1789, nella quale ha eſpoſta la ſteſſa idea con detagli ed applicazioni che ſono ſue proprie; ma queſta non fu mai pubblicata. Non ſe ne conoſcono che i principj fondamentali, ch' egli ſteſſo indicò in un' altra ſua opera ſul Calcolo delle derivazioni.

Lagrange preſe di nuovo in eſame queſto ſteſſo argomento, e lo trattò con qualche detaglio nel ſuo celebre Trattato ſulla Teoria delle Funzioni. Egli ſi

propone in questa sua opera di considerare le funzioni che nascono dalla riduzione in serie d' una funzione qualunque; egli dà la legge della loro formazione e derivazione, e ne mostra l'uso per la trasformazione delle espressioni analitiche; fa egli vedere poi in seguito l' applicazione di queste funzioni derivate ad alcuni problemi di Geometria e di Meccanica che sono trattati col Calcolo differenziale, e così dà alla soluzione di questi problemi tutto il rigore delle dimostrazioni degli antichi.

Questa maniera così semplice di dare un' origine puramente analitica al calcolo differenziale non era certamente nuova e del tutto ignota ai geometri predecessori di Arbogast e di Lagrange. Eulero doveva averne delle idee; egli che fu il primo a separare questo calcolo dalla sua applicazione alle curve, e che esprimendo per via di lettere i rapporti delle differenziali, aveva liberato dalle quantità infinitamente piccole le equazioni che ne contenevano. Anche lo stesso Newton doveva avere traspirato questa maniera di considerare il calcolo differenziale. Egli esaminò le ordinate successive d' una stessa curva, ridotte in serie ordinate secondo le potenze intere e positive delle ascisse, ed indicò le principali proprietà di questi coefficienti considerati nelle loro applicazioni a differenti quistioni geometriche. Non

mancava a questo grande geometra che la maniera di farli derivare gli uni dagli altri, ma Tailoro aveva fatto anche questo col suo famoso Teorema, il quale dà appunto la formazione successiva di questi coefficienti.

Fu specialmente l' applicazione del calcolo differenziale alla Geometria,. che fece dare a questo calcolo un carattere differente da quello dell' algebra ordinaria. Nella sua prima parte puramente analitica, che concerne tutte le regole pratiche per trovare le varie differenziali successive d' una funzione qualunque, si poteva vedere facilmente ch' era indifferente il prendere l' accrescimento della variabile piuttosto d' una che di un' altra grandezza o piccolezza. Ma passando all' altra parte di questo calcolo, che riguarda le sue applicazioni alle curve, ognuno doveva vedere che bisognava, per così dire, esaminare la curva ne' suoi primi elementi; e che per trovare, per esempio, le proprietà delle tangenti, bisognava considerarle nei punti immediatamente vicini ai punti di contatto, e considerarne perfino le primitive tendenze. Pare che i principj particolari a questo genere di calcolo si sieno introdotti anche nella suddetta prima parte puramente analitica, in vista soltanto dell' uso che si contemplava di farne nelle loro applicazioni geometriche.

Nella suddetta opera sulla Teoria delle funzioni

Lagrange aveva promeſſo di dimoſtrare in una terza parte l' identità di queſta teoria col calcolo differenziale, trattato alla maniera di Leibnizio, e quindi dimoſtrare i principj e le regole conoſciute di queſto, in una maniera indipendente da ogni ſuppoſizione e da ogni metafiſica.

Ma non ſi occupò più di queſta terza parte, quando ſeppe che Lacroix pubblicava un nuovo trattato ſul calcolo differenziale ed integrale, in cui queſto calcolo doveva eſſere preſentato ſotto tutti i punti di viſta, e trattato nel più grande detaglio. Egli è certo però che quello che contemplava di fare Lagrange, non è perlomeno eſaurito nella ſuindicata opera di Lacroix.

La lettura ſpecialmente di tutte queſte opere moderne, ed il biſogno ch' io ſempre ſentiva di ſpiegare e dimoſtrare una volta direttamente i principj degli infiniteſimi, mi determinarono a confrontare in detaglio il metodo di Leibnizio con quello di Lagrange, il che diede origine a queſta mia Memoria. Mi baſtò, per così dire, preſentarmi ſolamente ſotto agli occhi i due metodi ad un tempo per rilevare ſul fatto la ſpiegazione e la dimoſtrazione del primo. I ſoli articoli dei confronti ſui differenti metodi, con poche altre rifleſſioni ſparſe negli altri, formano la parte nuova che può forſe intereſſare il lettore. Il

refto, come parte fuffidiaria a quefti confronti, è tratto da Eulero, da Lagrange, da Lacroix e da Arbogaft. Trattandofi di confrontare due metodi, mi parve conveniente di prefentarli prima amendue, per non obbligare il lettore a cercarli in molte opere differenti, tanto più che per renderli meglio fufcettibili di confronto ho trovato neceffario talvolta di prefentarli piuttofto in una forma che in un' altra. Parimente effendo il metodo di Lagrange del tutto nuovo, e non per anco ben conofciuto in Italia, ho creduto bene di premetterne i principali elementi, anche per facilitare l'intelligenza degli fquarci che occorfero ai miei confronti.

Così in quefta mia Memoria non folo è fpiegato e dimoftrato il metodo di Leibnizio, ma vi fi ritrova ancora quello almeno che forma l' effenziale del metodo di Lagrange, e forfe quanto bafta per trattare, dietro ai nuovi principj di quefto grande Geometra, tutte le quiftioni che fi trattano col principio degli infinitefimi.

INTRODUZIONE

ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI DELLE FUNZIONI.

1. *Ogni funzione di* x + i *può sempre essere ridotta in una serie che procede secondo le potenze intere e positive di* i, *se si suppone che* x *ed* i *abbiano dei valori generali.*

Se la variabile x d'una funzione qualunque di x, $f(x)$, riceve un accrescimento rappresentato per i, per trovare ciò che diventa allora la funzione di questa quantità, si mette $x+i$ in luogo di x, e si ha $f(x+i)$ in luogo di $f(x)$. Prendendo per esempj varie funzioni conosciute sì algebriche che trascendenti, si troverà che la riduzione in serie della $f(x+i)$ prenderà sempre la forma $f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+$ ec., dove p, q, r, s ec. sono funzioni di x differenti dalla prima, ed indipendenti dalla quantità i. L'analogia potrebbe dunque farci conchiudere che tale pure sia per essere la forma della riduzione in serie d'una funzione qualunque. Ma si può anche dimostrarlo *a priori*, e ciò è tanto più necessario, quanto che vi sono dei casi particolari nei quali questa forma non può aver luogo; d'altronde il calcolo differenziale dipende interamente da questa ipotesi, ed i casi che fanno eccezione sono appunto quelli, nei quali questo calcolo è stato accusato d'essere in difetto.

Dimostriamo dunque che nella serie risultante dalla riduzione della funzione $f(x+i)$ non si può trovare; primo, alcuna potenza frazionaria di i; secondo, alcuna potenza negativa di i, a meno che non si diano ad x ed a i dei valori particolari.

Quanto alla prima parte. Egli è chiaro che i radicali di i non potrebbero provenire che dai radicali contenuti nella funzione primitiva $f(x)$, ed è chiaro parimente, che la sostituzione di $x+i$ in luogo di x non può nè accrescere nè diminuire il numero di questi radicali, nè cambiarne la natura, finchè x ed i sono quantità indeterminate. Da un altro canto, si sa per la teoria delle equazioni, che ogni radicale ha tanti valori differenti, quante sono le unità del suo esponente, e che ogni funzione irrazionale ha, per conseguenza, tanti valori differenti quante sono le combinazioni che si possono fare coi differenti valori dei radicali ch'essa racchiude. Dunque se la riduzione della funzione $f(x+i)$ potesse contenere un termine della forma $u\,i^{\frac{m}{n}}$, la funzione $f(x)$ sarebbe necessariamente irrazionale, ed avrebbe, per conseguenza, un certo numero di valori differenti, il quale sarebbe lo stesso per la funzione $f(x+i)$, che per la sua riduzione in serie. Ma poichè questa riduzione è rappresentata dalla serie $f(x)+p\,i+q\,i^2+r\,i^3+s\,i^4+\text{ec.}+u\,i^{\frac{m}{n}}$, ogni valore di $f(x)$ si combinerebbe con ciascheduno degli n valori del radicale $\sqrt[n]{i^m}$; talchè la funzione $f(x+i)$

ridotta in ferie, avrebbe più valori differenti della ſteſſa funzione non ridotta: ma ciò è aſſurdo; dunque la funzione $f(x+i)$ ridotta in ferie non può contenere alcuna potenza frazionaria di i.

Quanto alla feconda parte. Se qualche termine della ferie in cui s'è ridotta la funzione $f(x+i)$ conteneſſe una potenza negativa di i come ui^{-z}, eſſo avrebbe la forma $\frac{u}{i^z}$, e per conſeguenza la ferie diverrebbe infinita ſupponendo $i=0$, e non potrebbe più coincidere in queſto caſo colla funzione primitiva, come lo eſige la natura della ſoſtituzione che la produce. Dunque nella riduzione della $f(x+i)$ non vi può eſſere una potenza negativa di i.

2. *La funzione* $f(x+i)$ *può anche ridurſi in una ſerie della forma* $f(x)+iP$, *o* $f(x)+ip+i^2Q$, *o* $f(x)+ip+i^2q+i^3R$, ec. *arreſtandoſi a quel termine che ſi vuole.*

Se nella riduzione in ferie della funzione $f(x+i)$, ſi cerca la parte ch'è indipendente dalla quantità i, baſta fare $i=0$, lo che la riduce a $f(x)$; quindi $f(x)$ è la parte di $f(x+i)$, che reſta quando $i=0$; talchè $f(x+i)$ ſarà eguale a $f(x)$ più una quantità che deve ſvanire facendo $i=0$, e che ſarà per conſeguenza o potrà conſiderarſi moltiplicata per una potenza poſitiva di i; e poichè abbiamo dimoſtrato che nella riduzione di $f(x+i)$ non può entrare veruna potenza frazionaria o negativa di i, ne ſegue che queſta quantità non può eſſere moltiplicata che per una potenza poſitiva ed intera di i: eſſa ſarà dunque della forma iP, eſſendo P una funzione di x e di i, che non

diventerà infinita quando $i = o$. Si avrà dunque $f(x+i) = f(x) + iP$, e quindi $f(x+i) - f(x) = iP$, e per conseguenza divisibile per i; fatta la divisione si avrà $P = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Ora, essendo P una nuova funzione di x e di i, si potrà parimente separare quella parte ch'è indipendente da i, e che per conseguenza resta anche quando i diventa nullo. Sia dunque p ciò che diventa P quando si fa $i = o$, p sarà una funzione di x senza i: e con un ragionamento simile al precedente, si proverà che $P = p + iQ$, essendo iQ la parte di P, che diventa nulla, quando $i = o$, ed essendo Q una nuova funzione di x e di i, che non diventa infinita quando $i = o$. Si avrà dunque $P - p = iQ$, e per conseguenza divisibile per i; fatta la divisione si avrà $Q = \frac{P-p}{i}$. Sia q il valore di Q, quando si fa $i = o$; q sarà una funzione di x e di i, e la parte di Q che diventa nulla, sarà come sopra della forma iR, essendo R una funzione di x e di i, che non diventerà infinita quando $i = o$, e che si troverà dividendo $Q - q$ per i: e così in seguito. Si avrà dunque per mezzo di questa operazione, $f(x+i) = f(x) + iP$, $P = p + iQ$, $Q = q + iR$, $R = r + iS$ ec., e facendo successivamente le dovute sostituzioni, $f(x+i) = f(x) + iP = f(x) + ip + i^2 Q = f(x) + ip + i^2 q + i^3 R =$ ec.

Sia per esempio $f(x) = \frac{1}{x}$, si avrà $f(x+i) = \frac{1}{x+i}$;

dunque $iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = -\frac{i}{x(x+i)}$; $P = -\frac{1}{x(x+i)}$; $p = -\frac{1}{x^2}$; $iQ = -\frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)}$; $Q = \frac{1}{x^2(x+i)}$; $q = \frac{1}{x^3}$;

$iR = \frac{1}{x^3(x+i)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{i}{x^3(x+i)}$; $R = -\frac{1}{x^3(x+i)}$; $r = -\frac{1}{x^4}$, ec.; quindi si avrà $\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^2(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^3(x+i)} =$ ec. come risulta dalla divisione attuale.

Prendasi ancora per esempio la funzione irrazionale $\sqrt{x}$. Si avrà dunque $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x+i) = \sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP$; dunque $iP = \sqrt{(x+i)} - \sqrt{x} = \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}}$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}};\ p = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ iQ = P - p =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]}$$

$$= - \frac{i}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};\ Q = -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};\ q = - \frac{1}{8x\sqrt{x}};$$

$$iR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{[\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}]\,[\sqrt{(x+i)} - \sqrt{x}]}{4x[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2} =$$

$$\frac{i}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{4x[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

$$R = \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\left[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}\right]^3}; \quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}}; \text{ ec.}$$

Talchè farà $\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}}$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}\left[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}\right]^2} = \sqrt{x} +$$

$$\frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\left[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}\right]^3} \times$$

$$i^3 = \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{ ec.}$$

Questa ultima serie è quella che si trova estraendo la radice quadrata per mezzo della formola del binomio.

Sarebbe difficile l'eseguire queste operazioni sulle funzioni irrazionali più complicate; ma facendo svanire le irrazionalità per rapporto alla quantità i; l'applicazione del metodo non avrà più difficoltà.

Riprendendo l'esempio precedente, si partirà dall' equazione $\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP$, la quale elevata al quadrato per togliere la quantità i dal segno radicale, diventa dopo la divisione per i, $1 = 2P\sqrt{x} + iP^2$; facendo $i = 0$, P diventa p, e si avrà $1 = 2p\sqrt{x}$;

da cui ſi trae $p = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Si farà dunque $P = p + iQ$; e ſoſtituendo queſto valore di P nell'equazione $1 = 2P \times \sqrt{x} + iP^2$, e dividendo dopo per i, ſi avrà $0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2 Q^2$. Facendo $i = 0$, Q diventa q; dunque ſi avrà $\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0$, da cui ſi trae $q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}$. Si farà dunque $Q = q + iR$; e così in ſeguito.

Si poſſono per altro trovare i valori di p, q, r, ec. in un modo ancora più pronto, facendo l'equazione

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \text{ec.}$$

ed inalzandola poi alla ſeconda potenza per liberare i dal ſegno radicale, e paragonando poi i termini affetti dalle ſteſſe potenze di i, affinchè queſta quantità poſſa reſtare indeterminata, come lo ſi mette per ipoteſi. Ma il metodo precedente ha il vantaggio di non dar della ſerie ſe non che i termini che ſi vogliono, e di dare il valore eſatto del reſto.

3. *Nella riduzione in serie della funzione* $f(x+i)$, *si può sempre prendere per* i *un valore finito ed assegnabile tanto piccolo che uno dei termini qualunque della serie sia più grande della somma di tutti quelli che lo seguono.*

Essendo iP, iQ, iR ec. i resti delle funzioni di i, che diventano nulle, per la natura stessa della riduzione, quando $i=0$, ne segue che considerando la curva, la cui ascissa sia i, ed una di queste funzioni l'ordinata, questa curva taglierà l'asse all'origine delle ascisse; e a meno che questo punto non sia un punto particolare, lo che non potrebbe aver luogo che per valori particolari di x, com'è facile convincersene per quello che abbiamo detto nel numero primo, il corso della curva sarà necessariamente continuato dopo questo punto; dunque essa si avvicinerà a poco a poco all'asse prima di tagliarlo, e se ne avvicinerà d'una quantità minore di qualunque data; talchè si potrà sempre trovare un'ascissa i corrispondente ad un'ordinata minore di qualunque data; ed allora ogni valore più piccolo di i corrisponderà parimente ad ordinate minori della quantità data. Si potrà dunque prendere i così piccolo senza esser nullo, che iP sia minore di $f(x)$, o che iQ sia minore di p, o che iR sia minore di q, o che iS sia minore di r, e così in seguito; e per conseguenza si potrà prendere i così piccolo, che sia i^2R minore di ip, o che i^3R sia minore di i^2q, ec.; dunque poichè $iP=ip+i^2q+i^3r+$ ec.; $i^2Q=i^2q+i^3r+$ ec.; $i^3R=i^3r+$ ec.; ne segue che si potrà sempre dare ad i un tal valore così piccolo senza esser nullo, che ognuno dei termini della serie $fx+ip$

$+ i^2 q + i^3 r + i^4 s +$ ec. divenga più grande della somma di tutti i termini seguenti; ed allora ogni valore di i più piccolo di questo tale soddisferà sempre alla stessa condizione.

4. *Nella riduzione di* $f(x+i)$ *che abbiamo dimostrato essere la serie* $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 +$ *ec. i coefficienti* p, q, r, s, *ec. sono delle funzioni differenti dalla prima, ma che derivano le une dalle altre colla stessa legge, e nella stessa maniera che* p *deriva da* $f(x)$.

Suppongasi che nella $f(x+i)$ la quantità x prenda un accrescimento rappresentato per o, e mettasi $x+o$ in luogo di x nella $f(x+i)$, e nella sua riduzione in serie. Ma per fare questa sostituzione nelle funzioni; $f(x)$, p, q, r, s, ec. osservisi prima che $f(x)$ diventa $f(x+o) = f(x) + po + qo^2 + ro^3 + so^4 +$ ec. poichè essa è la stessa funzione che $f(x+i)$, nella quale non si è fatto che mettere o in luogo di i: quanto poi ai coefficienti p, q, r, s ec., come funzioni di x, essi debbono, quando si sostituisce $x+o$ in luogo di x, prendere una forma analoga a quella che si è supposta per $f(x+o)$; si scriverà dunque

$$\text{invece di}\quad \left.\begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \text{ ec.}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} p + p'o + p''o^2 + \text{ec.} \\ q + q'o + q''o^2 + \text{ec.} \\ r + r'o + r''o^2 + \text{ec.} \\ s + s'o + s''o^2 + \text{ec.}\end{matrix}\right\}\quad \text{nelle quali serie}$$

$$\left.\begin{matrix} p',\ p'' \text{ ec.} \\ q',\ q'' \text{ ec.} \\ r',\ r'' \text{ ec.} \\ s',\ s'' \text{ ec.}\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix}\text{rappresentano delle} \\ \text{nuove funzioni di } x \\ \text{derivate da}\end{matrix}\quad \left\{\begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s\end{matrix}\right.$$

come queste ultime lo sono dalla funzione proposta $f(x)$.

Mettendo invece di fx, p, q, r, s, ec. le espressioni che si sono formate, ed ordinando il risultato in modo che i termini affetti d'una stessa potenza di o sieno messi in una stessa colonna verticale si avrà

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \\ + pi \\ + qi^2 \\ + ri^3 \\ + si^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} + p \\ + p'i \\ + q'i^2 \\ + r'i^3 \\ + s'i^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} o \left\{\begin{array}{l} + q \\ + p''i \\ + q''i^2 \\ + r''i^3 \\ + s''i^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} o^2 + \text{ec.}$$

Ma scrivendo $x+o$ invece di x nella $f(x+i)$ ne risulta $f(x+i+o)$: ora si può trovare una riduzione in serie differente dalla precedente, osservando che se nella $f(x+i)$ si suppone che l'accrescimento medesimo i sia quello a cui siasi aggiunta la quantità o, si ricadrà ancora sulla funzione $f(x+i+o)$. Per tener conto di questo cambiamento, basterà mettere $i+o$ invece di i nella serie $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 +$ ec. la quale diventerà $f(x) + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + s(i+o)^4 +$ ec.

Elevando a tutte le indicate potenze il binomio $(i+o)$ ed ordinando i termini per colonne, come sopra, secondo le varie potenze di o, si troverà

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \\ + pi \\ + qi^2 \\ + ri^3 \\ + si^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} + p \\ + 2.qi \\ + 3.ri^2 \\ + 4.si^3 \\ + 5.ti^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} o \left\{\begin{array}{l} + q \\ + 3.ri \\ + 6.si^2 \\ + 10.ti^3 \\ + 15.ui^4 \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} o^2 + \text{ec.}$$

Paragonando questo risultato col precedente, si vedrà che la prima colonna d'uno è identica con quella dell' altro; passando poi alla seconda colonna, se ne dedurranno le seguenti equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} p = p \\ p' = 2.\, q \\ q' = 3.\, r \\ r' = 4.\, s \\ s' = 5.\, t \\ \text{ec.} \end{array}\right\} \text{ d'onde viene } \left\{\begin{array}{l} p = p \\ q = \dfrac{p'}{2} \\ r = \dfrac{q'}{3} \\ s = \dfrac{r'}{4} \\ t = \dfrac{s'}{5} \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

queste equazioni bastano per determinare p, q, r, s ec.

In fatti, dietro alle convenzioni di già stabilite: p è il coefficiente di i nella riduzione in serie della $f(x+i)$; p' deriva da p, nella stessa maniera che p deriva da $f(x)$. Dunque essendosi rappresentato p con $f'(x)$, p' sarà il coefficiente di i nella $f'(x+i)$. Chiamando $f''(x)$ questo ultimo coefficiente, si avrà $p' = f''(x)$; e facendone la sostituzione nell'equazione $q = \frac{p'}{2}$, si troverà $q = \frac{f''(x)}{2}$.

q' deriva da q, come p da $f(x)$:
dunque q' sarà il coefficiente di i nella $\frac{f''(x+i)}{2}$.

Denominando $f'''(x)$ il coefficiente di i nella $f''(x+i)$, si avrà $q' = \frac{f'''(x)}{2}$; sostituendo questo valore ne l'

equazione $r = \frac{q'}{3}$, si troverà $r = \frac{f'''(x)}{2.\ 3}$.

r' deriva da r, come p da $f(x)$:

dunque r' sarà il coefficiente di i nella $\frac{f'''(x+i)}{2.\ 3}$.

Denominando $f^{IV}(x)$ il coefficiente di i nella $f'''(x+i)$,

si avrà $r' = \frac{f^{IV}(x)}{2.\ 3}$; sostituendo questo valore nell' equazione $s = \frac{r'}{4}$, si troverà $s = \frac{f^{IV}(x)}{2.\ 3.\ 4.}$.

Si potrebbe continuare indefinitamente sempre nella stessa maniera; ma riavvicinando i risultati digià trovati, affine di conoscerne la legge, vedremo che avendo rappresentato il coefficiente di i nella riduzione in serie di

$$\left.\begin{array}{l} f(x+i) \\ f'(x+i) \\ f''(x+i) \\ f'''(x+i) \\ f^{IV}(x+i) \\ \text{ec.} \end{array}\right\} \text{ per } \left\{\begin{array}{l} f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \\ f^{IV}(x) \\ f^{V}(x) \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

si ha per ipotesi $p = \frac{f'(x)}{1}$, da cui si trae $p' = \frac{f''(x)}{1}$

e $q = \frac{f''(x)}{1.\ 2}$

Così da $q = \frac{f''(x)}{1.\,2}$, $r = \frac{f'''(x)}{1.\,2.\,3}$, $s = \frac{f^{IV}(x)}{1.\,2.\,3.\,4}$ ec. si ha $q' = \frac{f'''(x)}{1.\,2}$, $r' = \frac{f^{IV}(x)}{1.\,2.\,3}$, $s' = \frac{f^{IV}(x)}{1.\,2.\,3.\,4}$ ec. e $r = \frac{f'''(x)}{1.\,2.\,3}$, $s = \frac{f^{IV}(x)}{1.\,2.\,3.\,4}$, $t = \frac{f^{V}(x)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$ ec.

Sostituiscansi adesso invece di p, q, r, s, ec. i loro valori nella riduzione in serie della $f(x+i)$, e si avrà

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\frac{i}{1} + f''(x)\frac{i^2}{1.\,2} + f'''(x)\frac{i^3}{1.\,2.\,3} + f^{IV}(x)\frac{i^4}{1.\,2.\,3.\,4} \ldots \text{ec.}$$

5. *Se si hanno tre funzioni ridotte in serie ed ordinate secondo le potenze di* x *o di* dx, *come*

$$U = a + b.\,dx + c.\,dx^2 + d.\,dx^3 + \text{ec.}$$
$$V = a' + b'.\,dx + c'.\,dx^2 + d'.\,dx^3 + \text{ec.}$$
$$W = a'' + b''.\,dx + c''.\,dx^2 + d''.\,dx^3 + \text{ec.}$$

e che senza conoscere il valore di V, *si sappia ch'è intermediario tra quello di* U *e di* W, *cioè più grande dell'uno e minore dell'altro; se le due serie estreme hanno un certo numero dei loro primi termini eguali tra loro, la serie di* V *avrà il medesimo numero de' suoi primi ter-*

mini eguali ai termini corriſpondenti delle altre ſerie. Se ſi ha, per eſempio $a = a''$, $b = b''$; *ſi avrà pure* $a' = a$, $b' = b$.

Suppongaſi che ſiaſi dato a dx un valore così piccolo che renda minore di qualunque quantità data la ſomma di tutti i termini, che ſeguono il primo di ciaſcheduna delle ſerie propoſte,

e che in queſto ſtato ſi rappreſentino per $\left.\begin{matrix} a + \delta \\ a' + \delta' \\ a'' + \delta'' \end{matrix}\right\}$

ſe ſi ſottrae la prima dalla ſeconda, e la ſeconda dalla terza, ſi avrà $\left.\begin{matrix} a' - a + \delta' - \delta \\ a'' - a' + \delta'' - \delta' \end{matrix}\right\}$, riſultati che in virtù dell'enunziato della propoſizione, debbono eſſere poſitivi l'uno e l'altro. Ma ſe ſi fa $a'' = a$, e ſi faccia ſucceſſivamente, $\left.\begin{matrix} a' = a + d \\ a' = a - d \end{matrix}\right\}$, ſi proverà, che finchè d non è nullo, i valori delle formule ſuindicate ſaranno di ſegno differente.

Infatti ſoſtituito $a' = a + d$

ſi avrà $\left.\begin{matrix} a + d - a + \delta' - \delta \\ a'' - d - a + \delta'' - \delta' \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} + d + \delta' - \delta \\ - d + \delta'' - \delta' \end{matrix}\right\}$

e ſoſtituito $a' = a - d$

ſi avrà $\left.\begin{matrix} a - d - a + \delta' - \delta \\ a'' + d - a + \delta'' - \delta \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} - d + \delta' - \delta \\ + d + \delta'' - \delta' \end{matrix}\right\}$.

Dunque d dev'eſſere nullo, e perciò $a' = a$.

Se ſi prende dx così piccolo che renda minore di qualunque quantità data la ſomma di tutti i termini che ſeguono il ſecondo, ſi proverà nella ſteſſa maniera che dev'eſſere $b' = b$. Dunque ec.

Definizioni chiare e precise del Calcolo differenziale ed integrale, e spiegazione della notazione introdotta da Leibnizio.

6. Abbiamo veduto nel numero quarto che se si ha una funzione qualunque $f(x)$ d' una variabile x, e che si accresca la variabile d' una quantità i, si avrà

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+f''(x)\frac{i^2}{1.2}+f'''(x)\frac{i^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Se si saprà dunque trovare il coefficiente della prima potenza di i, si sapranno trovare anche tutti gli altri, giacchè si derivano tutti nella stessa maniera e colla medesima legge, e si potrà quindi trovare la riduzione in serie d' una funzione qualunque di $x+i$. Questo metodo di trovare i coefficienti di i facendoli derivare gli uni dagli altri è molto più semplice di quello che potrebbe sembrare a prima vista. Egli è vero che bisogna sapere ridurre in serie qualunque funzione, ma finalmente questa operazione si riduce semplicemente a saper trovare i secondi termini. Questa maniera di considerare le funzioni ci conduce ad una nuova specie di calcolo, che serve a risolvere dei problemi, che non si potevano sciogliere coll' algebra ordinaria. Si sa già, ed i Geometri che penetrano nello spirito delle loro operazioni, ne hanno continuamente delle pruove, che ogni volta che s' introduce nel calcolo qualche nuova operazione, questa fa nascere delle relazioni novelle, che conducono spesso a nuove verità.

La derivazione successiva delle funzioni $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ec. le quali si deducono dalla funzione proposta $f(x)$ per una serie d'operazioni affatto diverse da quelle che si praticano nell'algebra comune, deve dunque essere riguardata come un nuovo ramo dell'algebra. Essa ci offre subito i due problemi seguenti:

1.° *Data la funzione generatrice d'una variabile, trovare le funzioni derivate, moltiplicate per le varie potenze dell'accrescimento della variabile.*

2.° *Data una qualunque delle funzioni derivate, moltiplicate per la potenza rispettiva dell'accrescimento della variabile, trovare la funzione generatrice.*

7. Se si confronta la formola $f(x+i) = f(x) + f'(x)i + f''(x)\frac{i^2}{1.2} + f'''(x)\frac{i^3}{1.2.3}$ ec. colle varie differenziali successive d'una funzione nota di x, trovate colle regole ordinarie, si vedrà che queste varie differenziali corrispondono perfettamente coi termini della nostra formola, facendo però in questi astrazione dai denominatori numerici. In fatti, mettendo nella suddetta formola dx in luogo di i, si avrà $f(x+dx) = f(x) + f'(x)\,dx$

$$+ f''(x)\frac{dx^2}{1.2} + f'''(x)\frac{dx^3}{1.2.3} \text{ ec.}$$

Ora sia $f(x) = x^n$ sarà

$$f(x+dx) = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx +$$

$$n.(n-1)x^{n-2}\frac{dx^2}{1.2} + n.(n-1)(n-2)x^{n-3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Si vede subito che

$$f'(x)\,dx = n x^{n-1}\,dx$$

$$f''(x)\,dx^2 = n.(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2$$

$$f'''(x)\,dx^3 = n.(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\,dx^3$$

ec. ec.

e le quantità $n x^{n-1} dx$, $n.(n-1)\ x^{n-2} dx^2$, ec. sono appunto le differenziali prime, seconde, ec. della funzione x^n.

I due problemi dunque del numero precedente corrispondono perfettamente a questi altri due:

1.° *Data una funzione qualunque, trovare le sue varie differenziali.*

2.° *Data una delle differenziali qualunque, trovare la sua integrale.*

Noi siamo adunque adesso nel caso di formarci delle idee chiare e precise del così detto Calcolo Differenziale ed Integrale, senza aver bisogno di ricorrere a idee vaghe e paradossali, come sono quelle degli infinitamente piccoli. Basta concepire una funzione qualunque d'una variabile accresciuta di un'altra quantità, ridotta in una serie ordinata secondo le potenze dell'accrescimento, e considerare i varj termini di questa serie, che sono tanti prodotti di altre nuove funzioni che portano, per così dire, l'impronta della prima, e che sono moltiplicate per queste differenti potenze dell'accrescimento.

Passiamo ora a conoscere e a spiegare i segni che si sono impiegati nel Calcolo Differenziale. Vedremo che questi segni tengono al punto di vista, sotto del quale questo calcolo è stato considerato dal suo inventore.

8. Se dalla funzione $f(x+i)$ ſi ſottragga la funzione $f(x)$, ſi avrà $f(x+i) - fx = f'(x)i + f''(x)\frac{i^2}{1.2} + f'''(x)\frac{i^3}{1.2.3}$ + ec.

Ora $f(x+i) - f(x)$ è evidentemente la differenza tra lo ſtato primitivo della funzione $f(x)$, e quello che riſulta dal cangiamento arrivato ad x per l'aggiunta che gli ſi è fatta della quantità i: il ſecondo membro dell' equazione precedente è dunque la riduzione in ſerie di queſta differenza ordinata ſecondo le potenze di i, e ſi rimarcherà che baſta conoſcere il primo termine per trovare $f'(x)$. Abbiamo veduto nel numero precedente che queſto primo termine è preciſamente ciò che ſi chiama la *differenziale*. Dunque colla denominazione della *differenziale d'una funzione* s'intende dire una parte della differenza tra la funzione prima, e la funzione in cui ſi è accreſciuta la variabile d'una nuova quantità, ovvero s'intende con queſto nome d'indicare il primo termine di queſta differenza. La differenziale poi s'indica colla ſola lettera d; avremo dunque $df(x) = f'(x)i$, e quindi $f'(x) = \frac{df(x)}{i}$; riſultato che preſenta nello ſteſſo tempo una nuova maniera di eſprimere $f'(x)$, dividendo la differenziale della funzione propoſta, oppure, il ch'è lo ſteſſo, dividendo il primo termine della differenza tra i due valori conſecutivi di queſta funzione, per l'accreſcimento.

Si vede facilmente che per questa divisione i svanisce dal valore di $f'(x)$, nel quale non deve entrare, di modo che questo accrescimento si può rappresentare come si vuole. Per mettere dell'uniformità nei segni, e rappresentare in un modo generale l'espressione $\frac{df(x)}{i}$, tale che possa impiegarsi qualunque sia la lettera che rappresenta la variabile da cui dipende la funzione proposta, si poteva dunque mettere dx in luogo di i, cioè si poteva supporre che x si cambiasse in $x + dx$, dal che risulta $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Applicando la caratteristica d alla variabile x, s' indica il suo accrescimento con un segno, che ne fa vedere l' origine, ed è quindi meno arbitrario di i. Se si avesse $\frac{d\varphi(y)}{dy}$, si vedrebbe subito che questa espressione è per rapporto alla $\varphi(y)$ precisamente quello che $\frac{df(x)}{dx}$ è per rapporto a $f(x)$, e che dy rappresenta l' accrescimento ipotetico di y.

E' facile parimente il vedere che dx non è altro che un segno impiegato per indicare l'operazione che si è fatta per giungere all'espressione $f'(x)$, e per far sempre osservare che non si è considerato che il primo termine della riduzione in serie della differenza indicata;

poichè d'altronde si fa sempre astrazione dal valore dell' accrescimento che rappresenta.

Questa notazione che serve a rappresentare $f'(x)$, può essere applicata con un metodo analogo alle funzioni $f''(x)$, $f'''(x)$ ec. In fatti, per le cose dette abbiamo

$f'(x+i) = f'(x) + f''(x)\, i + \text{ec.}$

$f''(x+i) = f''(x) + f'''(x)\, i + \text{ec.}$

$f'''(x+i) = f'''(x) + f^{IV}(x)\, i + \text{ec}$, le quali equazioni diventano

$f'(x+i) - f'(x) = f''(x)\, i + \text{ec.}$

$f''(x+i) - f''(x) = f'''(x)\, i + \text{ec.}$

$f'''(x+i) - f'''(x) = f^{IV}(x)\, i + \text{ec.}$, e sostituendo dx ad i, si ha

$f'(x+dx) - f'(x) = f''(x)\, dx + \text{ec.}$

$f''(x+dx) - f''(x) = f'''(x)\, dx + \text{ec.}$

$f'''(x+dx) - f'''(x) = f^{IV}(x)\, dx + \text{ec.}$; ora per la definizione data della differenziale si ha

$$\left.\begin{aligned} f''(x)\, dx &= df'(x) \\ f'''(x)\, dx &= df''(x) \\ f^{IV}(x)\, dx &= df'''(x) \end{aligned}\right\} \text{ e quindi } \left\{\begin{aligned} f''(x) &= \frac{df'(x)}{dx} \\ f'''(x) &= \frac{df''(x)}{dx} \\ f^{IV}(x) &= \frac{df'''(x)}{dx} \end{aligned}\right.$$

d'onde segue che si può dedurre ciascheduna delle funzioni $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ec. dalla differenziale che la precede.

Se si sostituisce in luogo di $f'(x)$ il suo valore $\frac{d f(x)}{d x}$.

o

in quello di $f''(x)$, si troverà $f''(x) = \frac{d\left[\frac{d f(x)}{d x}\right]}{d x}$.

Continuando collo stesso metodo, si rapportano immediatamente alla funzione primitiva tutte le funzioni derivate; ma la notazione va diventando sempre più complicata. Per semplificarla, si osservi che riguardando $d x$ come invariabile, $f'(x)\, d x$ si cambia in $f'(x + d x)\, d x$, quando x diventa $x + d x$, e che si ha

$f'(x + d x)\, d x - f'(x)\, d x = f''(x)\, d x^2$; dunque

$f''(x)\, d x^2 = d f'(x)\, d x$; per le stesse ragioni

$$f'''(x)\, d x^3 = d f''(x)\, d x^2$$

$$f^{IV}(x)\, d x^4 = d f'''(x)\, d x^3$$

ec. ec.

Se si mette nella prima di queste equazioni per $f'(x)\, d x$ il suo valore $d f(x)$, si troverà $f''(x)\, d x = d d f(x)$, o per più brevità $= d^2 f(x)$, e quindi le seguenti diventeranno

$$f'''(x)\, d x^3 = d d d f(x) = d^3 f(x)$$

$$f^{IV}(x)\, d x^4 = d d d d f(x) = d^4 f(x)$$

ec. ec. ec.

Queste ultime danno delle espressioni molto semplici per le funzioni derivate; poichè si ha

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x}$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{d x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{d x^3}$$

$$f^{iv}(x) = \frac{d^4 f(x)}{d x^4}$$

ec. ec.

Risulta da ciò che $d f(x)$ è ciò che si chiama la differenziale prima, o semplicemente la differenziale di $f(x)$; $d^2 f(x)$ è ciò che si chiama la differenziale di questa differenziale, ovvero la differenziale seconda di $f(x)$; $d^3 f(x)$ la differenziale terza, ec.

Le funzioni $\left.\begin{matrix} f'(x) \\ f''(x) \end{matrix}\right\}$ o le loro equivalenti $\left.\begin{matrix} d f(x) \\ d^2 f(x) \end{matrix}\right\}$
ec. ec.

sono chiamate col nome di coefficienti differenziali, e si distinguono tra esse pel numero diverso di differenziazioni che suppongono: $\frac{d^3 f(x)}{d x^3}$, per esempio, che nasce dalla differenziale terza, sarà il coefficiente differenziale del terzo ordine.

Sostituendo nella riduzione in serie di $f(x+i)$ in luogo di $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ec. le loro espressioni dietro alla notazione, di cui abbiamo spiegato i principj, si avrà

$$f(x+i)=fx+\frac{df(x)\,i}{dx}+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3f(x)}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Rappresentisi la funzione $f(x)$ colla sola lettera u, le sue differenziali successive saranno espresse per du, d^2u, d^3u ec., ed i coefficienti differenziali per $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$ ec., ed x diventando $x+i$, u si cambierà in $u+\frac{du\,i}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+$ ec.

Messo in fine dx in luogo di i, e fatta $f(x+i)=u'$, sarà

$$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Questa è la formola conosciuta sotto il nome di Teorema di Tailoro, perchè se ne deve la scoperta a questo dotto geometra inglese. Essa serve in qualche modo di base al calcolo differenziale. Noi l'abbiamo dimostrata nel tempo stesso che si è spiegata la notazione usitata del calcolo differenziale.

Devesi avvertire che non bisogna confondere le quantità dx, dx^2, dx^3 ec. ch'entrano nella suddetta formola come denominatori, con quelle ch'entrano come numeratori. Le prime non servono nelle espressioni precedenti, che come segni indicativi delle operazioni da farsi, cioè significano ch'è la quantità x quella che varia; i secondi poi esprimono l'accrescimento medesimo che si attribuisce alla variabile x.

RIDUZIONE DELLE FUNZIONI IN SERIE.

Funzioni Esponenziali.

Riduzione in serie della funzione a^x
coll' uso degl' infinitesimi.

9. Poichè $a^0 = 1$, se l' esponente diventa una quantità infinitamente piccola, anche la potestà supererà l' unità d' una quantità infinitesima. Sia dunque ω una quantità infinitesima, ovvero una frazione così piccola che solamente a^ω non sia eguale all' unità; sarà $a^\omega = 1 + \psi$, indicando ψ qualunque numero infinitamente piccolo. Sarà dunque ψ o uguale ω, o maggiore o minore, la qual ragione dipenderà dal valore della lettera a; ma questa è ancora ignota; si potrà dunque fare $\psi = k\omega$, per cui si avrà $a^\omega = 1 + k\omega$.

Essendo $a^\omega = 1 + k\omega$, sarà $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, qualunque sia il numero i. Sarà dunque $a^{i\omega} = 1 +$

$$\frac{i}{1} k\omega + \frac{i(i-1)}{1.2} k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} k^3\omega^3 + \text{ec.}$$

Se dunque si fa $i = \frac{z}{\omega}$, e z indichi un numero qualunque finito, per essere ω infinitamente piccolo, i sarà infinitamente grande, e quindi $\omega = \frac{z}{i}$, talchè ω sarà frazione d' un denominatore infinito, e perciò infinitamente piccola, come si è presa.

Sostituiscasi dunque $\frac{z}{i}$ invece di ω, e si avrà

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} k z + \frac{1(i-1)}{1.2.i} k^2 z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.2.3.i^2} k^3 z^3 + \text{ec.}$$

la quale equazione sarà vera se al numero i si sostituisca un numero infinitamente grande. Osservisi che k è un numero definito dipendente da a.

Essendo i un numero infinitamente grande, sarà $\frac{i-1}{i} = 1$; poichè quanto più grande è i, tanto più il valore della frazione $\frac{i-1}{i}$ si accosta all'unità. Quindi se i è più grande d'ogni numero assegnabile, la frazione $\frac{i-1}{i}$ sarà eguale all'unità. Per la stessa ragione avremo $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$ ec.

Sostituiti questi valori, si avrà $a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \text{ec.}$

Riduzione in serie della stessa funzione a^x *senza il soccorso degl' infinitesimi.*

10. Sia $y = a^x$. Mettasi invece di a, $1 + a - 1$, ch'è lo stesso che lasciare a, e poi invece di $(1 + a - 1)^x$ mettasi $[(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}$, ch'è pure sempre la stessa cosa che lasciare a^x; si avrà

$$y = [(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}},$$ e sarà n una quantità qualunque che dovrà svanire da se stessa nel valore di y.

Riducasi adesso il binomio $(1 + (a - 1))^n$ nella serie

$$1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{ec.}$$

e si ordini secondo le potenze di n, e si avrà
$(1 + (a - 1))^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + \text{ec.}$
I coefficienti A, B, C, D, ec. sono dati in a, e si vedrà facilmente ch'è

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ec.}$$

Quanto agli altri coefficienti non si avrà bisogno di cercarli, perchè svaniranno dal calcolo come si vedrà.

Facendo questa sostituzione, si avrà $y = (1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \text{ec.})^{\frac{x}{n}}$; e riducendo alla maniera del binomio, verrà

$$y = 1 + \frac{x}{n}\ (\mathcal{A}n + Bn^2 + Cn^3 + \text{ec.})$$

$$+ \frac{x(x-n)}{2n^2}\ (\mathcal{A}n + Bn^2 + Cn^3 + \text{ec.})^2$$

$$+ \frac{x(x-n)\ (x-2n)}{2.\ 3.\ n^3}(\mathcal{A}n + Bn^2 + Cn^3 + \text{ec.})^3 + \text{ec.}$$

cioè, togliendo le potenze n comuni ai numeratori ed ai denominatori

$$y = 1 + x(\mathcal{A} + Bn + Cn^2) + \frac{x(x-n)}{2}(\mathcal{A} + Bn + Cn^2)^2$$

$$+ \frac{x(x-n)\ (x-2n)}{2.\ 3}\ (\mathcal{A} + Bn + Cn^2)^3 + \text{ec.}$$

Ora essendo la quantità n arbitraria, e dovendo per la natura stessa della funzione y svanire dall'espressione di questa funzione, bisognerà che tutti i termini moltiplicati per le varie potenze di n si distruggano reciprocamente. Non tenendo dunque conto di questi termini che devono svanire qualunque sia n, si avrà semplicemente

$$y = a^x = 1 + \mathcal{A}x + \frac{\mathcal{A}^2 x^2}{2} + \frac{\mathcal{A}^3 x^3}{2.\ 3} + \frac{\mathcal{A}^4 x^4}{2.\ 3.\ 4} + \text{ec.}$$

Confronto di questi due metodi differenti per ridurre in serie la funzione esponenziale, e quindi vero spirito del principio degli infinitesimi nella riduzione in serie di queste funzioni.

11. Il primo dei due metodi sopra esposti è tratto da Eulero, ed il secondo da Lagrange, come si farà in progresso, quando si vorranno presentare le due maniere di calcolare, o di dimostrare per mezzo del principio degli infinitesimi, o senza far uso di questo principio. Solamente nei varj metodi di Lagrange sceglieremo i più suscettibili di confronto con quelli di Eulero; o cercheremo di renderli tali, procurando, anche quando lo crederemo utile, di presentarli in una maniera più facile, profittando dei lumi che abbiamo tratti dalle opere di Lacroix e di Arbogast. Il primo seguì in gran parte i nuovi principj di Lagrange nel suo trattato del Calcolo differenziale ed integrale ed in quello delle Serie; il secondo ebbe alcune viste sue particolari sulle funzioni che coincidono perfettamente con quelle dello stesso Lagrange.

Esaminando il metodo di Lagrange per ridurre in serie la funzione a^x si vede ch'esso consiste: primo, nel dare alla quantità a la forma $1 + a - 1$; secondo, nell' inalzare questa quantità prima alla potestà x, poi alla potestà $\frac{x}{n}$. Il mettere $1 + a - 1$ in luogo di a non è, come si vede, alterare per niente la stessa quantità a, ma

è solamente metterla sotto una tale forma, che faccia che la sua potenza sia suscettibile d'essere ridotta in serie, poichè una quantità sotto la forma di monomio non lo potrebbe essere. L'inalzare poi questa quantità prima alla

potestà n, e poi alla potestà $\frac{x}{n}$, è lo stesso che inalzarla

solamente alla potestà x, come deve farsi, e la quantità n entrando prima come potenza, poi come radice d'una stessa quantità deve finire collo svanire, ovvero tutte le quantità nelle quali entra n devono reciprocamente distruggersi. Questa elevazione poi di potenza, e questa estrazione di radice sono necessarie per trovare l'ultima riduzione in serie della quantità a^x che si cerca. Tra le quantità che svaniscono per contenere dei prodotti delle varie potenze di n, si vede dalla penultima formola, che svaniscono tutti i termini meno i due primi, dalla riduzione in serie della potenza $(1 + a - 1)^n$.

Dopo aver premesso questo piccolo esame sul metodo seguito da Lagrange, passando all'esame di quello di Eulero, si vedrà facilmente che la quantità indeterminata n di Lagrange corrisponde precisamente all'ω di Eulero, e

quindi $\frac{x}{n}$ è la stessa cosa che $i = \frac{z}{\omega}$.

Infatti si fa a^ω da Eulero, come si fa $(1 + a - 1)^n$ da Lagrange. Solamente Eulero non dà per la riduzione in serie di a^ω che i due primi termini, mentre Lagrange li dà tutti. Ma tutti quelli che seguono il secondo

ſono per il fatto inutili, perchè già in fine devono ſvanire per non potere eſſere liberati da n, o dalle ſue varie potenze ch'entrano come fattori. Si poſſono dunque ommettere fin dal principio, e ſi può fare ſolamente $a^{\omega} = 1 + k\omega$, come ſi poteva fare con Lagrange $(1 + a - 1)^n = 1 + \mathcal{A}n$ (corriſpondendo $\mathcal{A}$ a k). Non è dunque altrimenti vero che ſia $a^{\omega} = 1 + k\omega$ ſolamente, per eſſere ω infinitamente piccolo, perchè per quanto piccolo eſſo ſia, deve eſſere ſempre $a^{\omega} = 1 + k\omega + B\omega^2 + C\omega^3 +$ ec., ma è che ſi fa $a^{\omega} = 1 + k\omega$, perchè ſi trovò col fatto eſſere inutili tutti gli altri termini.

Si fa poi da Eulero $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, ed anche queſta equazione corriſponde all'altra di Lagrange

$$[(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}} = (1 + \mathcal{A}x + Bn^2 + Cn^3 + \text{ec.})^{\frac{x}{n}};$$

poichè eſſendo $i = \frac{z}{\omega}$, la ſuddetta equazione di Eulero è

$$(a^{\omega})^{\frac{z}{\omega}} = (1 + k\omega)^{\frac{z}{\omega}};$$ ſolamente nel ſecondo membro dell'equazione di Lagrange ſi continua a tener conto di tutti i termini della quantità $(1 + a - 1)^n$ ridotta in ſerie, dei quali ſi è già fatta rimarcare la ſuperfluità.

Continuando il confronto, fatta prima la ſoſtituzione di $\frac{z}{i}$ in luogo di ω nella riduzione di $(1 + k\omega)^i$, ſi troveranno pure identiche le due formole ſeguenti, benchè a prima viſta non appariſcano tali.

di Eulero

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1(i-1)}{1.2.i} k^2 z^2 + \text{ec. } E$$

di Lagrange

$$a^x = 1 + x(A + Bn + Cn^2 + \text{ec.}) + \frac{x(x-n)}{2}(A + Bn + Cn^2 + \text{ec.})^2 \; L$$

In fatti sostituiscasi nella formola di Eulero $\frac{z}{\omega}$ in luogo di i, e si avrà

$$a^z = 1 + z(k) + z^2 \frac{\left(\frac{z}{\omega} - 1\right)}{1.2.\frac{z}{\omega}} (k^2) + \text{ec. } E$$

$$= 1 + z(k) + \frac{z(z-\omega)}{2} (k^2) + \text{ec. } E$$

La differenza non consisterà sempre che nella omissione dei termini del valore di a^ω, dopo i due primi.

Ma giunti l' uno e l' altro a queste penultime formole E, L, sempre con equazioni che si trovano identiche per ogni poco che si esaminano, i ragionamenti del primo sono ben diversi da quelli del secondo per trovare la stessa formola finale, o piuttosto Eulero ricorre al principio dell' infinito, che per lo meno non è suscettibile di quella evidenza e rigore di dimostrazione che giustamente richiedesi nelle matematiche; mentre Lagrange non deve se non se ricordare che la quantità n facendo e disfacendo, per

per così dire, la stessa operazione, debbono svanire tutti i termini che moltiplicano questa quantità, o le sue differenti potenze. Pure anche in questo i calcoli sono i medesimi, e la differenza non istà che nella diversa maniera di esprimersi. Infatti Eulero considerando i come una quantità infinita fa $\frac{i-1}{i}=1$, $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$ ec. e Lagrange, per togliere tutti i termini nei quali entra n, essendo n una quantità che deve svanire, fa $x-n=x$, $x-2n=x$, ec. Ma il fare $\frac{i-1}{i}=1$ è lo stesso che fare $x-n=x$. Basta, per vederlo, sostituire $\frac{z}{\omega}$ in luogo di i nell' espressione $\frac{i-1}{i}=1$, e si avrà $\frac{\frac{z}{\omega}-1}{\frac{z}{\omega}}=1$, ovvero $z-\omega=z$, espressione identica con $x-n=x$, avendo già fatto osservare ancora che x rappresenta z, ed n è rappresentato da ω. Nello stesso modo si trova che $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$ corrisponde a $x-2n=x$, ec.

Risulta da questo confronto dei due metodi, e dalle riflessioni relative che tutti e due sono nel fondo i medesimi, che a mano a mano le formule sono identiche, e

che perfino i ragionamenti non differiſcono che nelle parole. La quantità rappreſentata per ω da Eulero, e chiamata infinitamente piccola, è preciſamente la quantità arbitraria n di Lagrange, e la quantità i ovvero $\frac{z}{\omega}$ ch' Eulero impiega come infinita, corriſponde alla quantità $\frac{x}{n}$ di Lagrange, e tanto con l'uno che con l'altro, col primo ω, col ſecondo n, ſervono a fare ſulle ſteſſe quantità delle operazioni contrarie a quelle che ſi fanno dappoi o con $i = \frac{z}{\omega}$, o con $\frac{x}{n}$, per cui alla fine del calcolo debbono ſvanire tutti i termini che contengono ω da una parte, ed n dall' altra. Dunque la quantità ω che rappreſenta l'infiniteſimo, e ſerve poi a rappreſentare l'infinito, impiegata come denominatore d' una frazione, che ha per numeratore una quantità finita z, non è in ſoſtanza che una quantità ſuſſidiaria; e tali denominazioni d'infiniteſimo e d' infinito, che d'altronde non preſentano mai idee chiare e diſtinte non ſervono ad indicare ſennonchè ſi debbono eſeguire due operazioni l' una all' altra contraria, le quali operazioni ſono nel noſtro caſo elevazione ad una indeterminata potenza, ed eſtrazione d' una indeterminata radice ſempre della ſteſſa quantità.

Paſſiamo adeſſo ad eſaminare le funzioni logaritmiche.

FUNZIONI LOGARITMICHE

Riduzione in serie della funzione log. x coll'uso degli infinitesimi.

12. Essendo $a^\omega = 1 + k\omega$, facendo ω infinitamente piccolo, se a è la base, si avrà

$$\omega = \mathrm{l.}(1 + k\omega),\ \text{ed}\ i\omega = \mathrm{l.}(1 + k\omega)^i$$

E' chiaro, che quanto i sarà maggiore, tanto più $(1 + k\omega)^i$ supererà l'unità; quindi facendo $i =$ ad un numero infinito $(1 + k\omega)^i$ arriverà a qualunque numero maggiore dell'unità. Pongasi dunque $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, sarà $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, e $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$,

quindi $i\omega = \frac{i}{k}\left((1 + x^{\frac{1}{i}}) - 1\right)$. Essendo $i\omega = \mathrm{l.}(1 + x)$,

sarà $\mathrm{l.}(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, posto i un numero infinitamente grande. Ora è

$$(1 + x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{1.2.i}x^2 + \text{ec.}$$

Essendo i un numero infinitamente grande, sarà $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, ec.

quindi sarà $i(1 + x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3}$ ec., e

perciò $\mathrm{l.}(1 + x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \text{ec.}\right.$

Riduzione in serie della stessa funzione log. x, senza il soccorso degli infinitesimi.

13. Sia $a^x = y$. Mettasi questa equazione sotto la forma $(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n$ ch'è identica colla precedente, e nella quale n è una quantità qualunque che non deve entrare nel valore di x in y.

Riducendo i due membri alla maniera del binomio,

si avrà $1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2}(a-1)^2$

$$+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{ec.}$$

$$= 1 + n(y-1) + \frac{n(n-1)}{2}(y-1)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{ec.}$$

Cioè togliendo l'unità da una parte e dall'altra, e dividendo per n, si avrà

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2$$

$$+ \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{ec.}$$

$$=y-1+\frac{(n-1)}{2}(y-1)^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3+\text{ec.}$$

Ora essendo n, come si è detto, una quantità interamente arbitraria, e che non deve entrare nell'espressione di x in y, converrà che i termini moltiplicati per le differenti potenze di n si distruggano da se stessi; talchè non restino che quelli nei quali non entra n. Quindi si avrà, non tenendo conto che dei termini senza n, l'equazione seguente, nella quale s'impiega, per brevità, la quantità $\mathcal{A}$, determinata come sopra (num. 10).

$$x\mathcal{A}=y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\text{ec.}$$

d'onde si ha

$$x=\log.y=\frac{1}{\mathcal{A}}\left(y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\text{ec.}\right)$$

Confronto dei due metodi precedenti, e quindi vera idea degli infinitesimi nella riduzione delle funzioni logaritmiche.

14. Se nell'equazione finale di Eulero si mette $y-1$ in luogo di x, ovvero se in quella di Lagrange si mette $x+1$ in luogo di y, esse sono ridotte a due equazioni identiche, avvertendo che $\mathcal{A}$ è lo stesso che k. Il calcolo di Lagrange si può dunque riguardare come la dimostrazione di quello di Eulero. Ma non si tratta di provare

che il risultato di Eulero ottenuto coll' uso degl' infinitesimi sia vero; si tratta di far vedere lo spirito del metodo degli infinitesimi, cioè il vero senso nel quale debbono essere intesi; e per far ciò bisogna, come facemmo nelle funzioni esponenziali, confrontare a passo a passo il calcolo di Eulero con quello di Lagrange. Ora nella riduzione di queste funzioni le marcie dei due metodi non sono così uniformi da poterle confrontare con quella facilità, con cui abbiamo fatto per la riduzione della funzione a^x. Ma noi vi suppliremo col rifare il calcolo stesso di Eulero, seguendo precisamente la sua marcia fino alla formula finale, impiegando perfino le stesse lettere, senza parlare nè d' infinitamente piccoli, nè d' infinitamente grandi, ed usando dell'artificio impiegato da Lagrange, cioè introducendo una quantità sussidiaria, che svanirà alla fine del calcolo, e finalmente non trascurando mai termini. Così il principio degli infinitesimi sarà spiegato, s' è possibile, anche con maggior chiarezza ed evidenza di quello che abbiamo fatto per la riduzione delle funzioni esponenziali.

Essendo $a^{\omega} = 1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2.} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}$

Se a è la base, si avrà

$$\omega = \text{l.}\left(1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)$$

e moltiplicando l' uno e l' altro membro per $\frac{1}{\omega}$, sarà

$$\omega \times \frac{1}{\omega} = \text{l.}\left(1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)^{\frac{1}{\omega}}$$

E' chiaro che in qualunque ſiſtema il logaritmo dell'unità eſſendo uguale a zero, la quantità

$$\left(1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)^{\frac{1}{\omega}}$$ dev' eſſere

maggiore dell' unità. Pongaſi dunque

$$\left(1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)^{\frac{1}{\omega}} = 1 + x,$$ ſarà

$$1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2.} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.} = (1 + x)^{\omega},$$ e

$$k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.} = (1 + x)^{\omega} - 1;$$ quindi

$$\frac{1}{\omega} \times \omega + \frac{k\omega}{1.2} + \frac{k^2\omega^2}{1.2.3} + \text{ec.} = \frac{1}{\omega} \times \frac{1}{k}\left((1+x)^{\omega} - 1\right).$$

Eſſendo poi $\omega \times \frac{1}{\omega} = \text{l.}\ (1 + x)$, ſarà

$$\text{l.}(1+x) + \frac{k\omega}{1.2} + \frac{k^2\omega^2}{1.2.3} + \text{ec.} = \frac{1}{k\omega}\left((1+x)^{\omega} - 1\right).$$

Ora è $(1+x)^\omega = 1 + \omega x + \frac{\omega(\omega-1)}{2} x^2$

$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2.\ 3} x^3 +$ ec.

Dunque l. $(1+x) + k\omega + \frac{k^2 \omega^2}{1.2} +$ ec.

$$= \frac{1}{k\omega}\left(\omega x + \frac{\omega(\omega-1)}{2} x^2 + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2.\ 3} x^3 + \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(x + \frac{\omega-1}{2} x^2 + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{2.\ 3} x^3 + \text{ec.}\right)$$

Ora trascurando tutti i termini che moltiplicano le varie potenze di ω, essendo ω una quantità arbitraria, che deve svanire dal calcolo, si avrà

$$\text{l.}(1+x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{ec.}\right)$$

Basta aver rifatto il calcolo di Eulero in questa maniera, per veder subito cosa significa la quantità infinitamente piccola, e la quantità infinitamente grande. Non abbiamo fatto altro che mettere $\frac{1}{\omega}$ in luogo di i,

che d'altronde è precisamente quello che esprime la quantità infinitamente grande, perchè (usando i segni adottati dai seguaci degli infinitesimi) se $\omega = \frac{1}{\infty}$, essendo $i = \frac{1}{\omega}$, sarà pure eguale ∞. Ma noi abbiamo veduto solamente con questa sostituzione di $\frac{1}{\omega}$ per i, che l'uso dell'introduzione della quantità infinitamente piccola ed infinitamente grande non significa che l'introduzione di due quantità l'una opposta all'altra, cioè tali che l'operazione che si fa coll'una, viene distrutta dall'operazione che si fa coll'altra. Queste due quantità dunque debbono in fine svanire. E come nel nostro caso una è rappresentata per ω, l'altra per $\frac{1}{\omega}$, devesi fare svanire ω e le quantità moltiplicate per le sue varie potenze, onde toglierle dal calcolo amendue.

Le poche differenze che ancora sussistono tra il calcolo di Eulero, e quello che noi abbiamo fatto, non sono che apparenti. Abbiamo ritenuto fino all'ultima equazione tutti i termini della serie

$1 + k\omega + \frac{k^2\omega^2}{1.2} + \frac{k^3\omega^3}{1.2.3} + \text{ec.}$; ma noi già sapevamo che si potevano omettere fin dal principio tutti i termini meno i due primi, come fa Eulero; giacchè,

come ſvaniſcono alla fine del calcolo, erano inutili. Così nella penultima equazione facendo ſvanire nel ſecondo membro tutti i termini che moltiplicano le varie potenze

di ω, è come aveſſimo fatto $\frac{\omega - 1}{2} = -\frac{1}{2}$ ec. mentre

Eulero dietro ai principj dell' infinito fa $\frac{i - 1}{2\,i} = \frac{1}{2}$ ec.

Ma meſſo $\frac{1}{\omega}$ in luogo di i nell' eſpreſſione $\frac{i - 1}{2\,i} = \frac{1}{2}$,

ſi ha $\frac{\frac{1}{\omega} - 1}{\frac{2}{\omega}} = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{1 - \omega}{2} = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{\omega - 1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Poſſiamo dunque conchiudere, anche per le funzioni logaritmiche, che l' infiniteſimo e l' infinito corriſpondono ad una ſteſſa quantità impiegata in ſenſi oppoſti, e che non v' ha che una differenza d' eſpreſſione tra i principj d' Eulero e quelli di Lagrange.

FUNZIONI CIRCOLARI.

Riduzione in ſerie delle funzioni sen. x, *cos.* x *per mezzo degli infiniteſimi.*

15. Per le formole conoſciute nella Trigonometria ſi ha $(\cos. z \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{sen}.\, z)^n = \cos.\, nz \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{sen}.\, nz$ ovvero

$$(\cos. z + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n = \cos. nz + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, nz$$
$$(\cos. z - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n = \cos. nz - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, nz.$$

Ora fommando tra di loro i membri delle due equazioni precedenti, e poi fottraendoli, fi avranno le altre due feguenti equazioni

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n}{2}$$

$$\text{sen.}\, nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1} \,.\, \text{sen.}\, z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Svolgendo le varie potenze indicate di n, e riducendo farà

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n(n-1)}{1.\,2} (\cos. z)^{n-2} (\text{sen.}\, z)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4} (\cos. z)^{n-4} (\text{sen.}\, z)^4 - \text{ec.}$$

$$\text{sen.}\, nz = n(\cos. z)^{n-1} \text{sen.}\, z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} (\cos. z)^{n-3} (\text{sen.}\, z)^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} (\cos. z)^{n-5} (\text{sen.}\, z)^5 - \text{ec.}$$

Sia z infinitamente piccolo, farà $\text{sen.}\, z = z$, e $\cos. z = 1$. Se poi n è un numero infinitamente grande affinchè nz fia finito, bifogna che fia $nz = x$, rapprefen-

tando per x una quantità qualunque. Sarà dunque $z = \frac{x}{n}$

Fatte queste sostituzioni, e ricordandosi che $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, ec.; si avrà

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

$$\text{sen.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

Riduzione in serie delle funzioni sen. x. *e* cos. x, *senza far uso degli infinitesimi.*

16. Partendo dalle formole conosciute per la moltiplicazione degli angoli

$$\cos. nx + \text{sen.}\, nx \sqrt{-1} = (\cos. x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1})^n,$$

si ha reciprocamente

$$\cos. x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1} = (\cos. nx + \text{sen.}\, nx \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

dove il numero n può essere qualunque.

Anche senza conoscere l' espressione di *sen.* x in serie dell' arco x, si sa che essa non può essere che della forma $Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ ec.; poichè dovendo diventar nullo il seno, quando l' arco è nullo, è chiaro che questa espressione non deve contenere alcun termine

ſenza x. Ora eſſendo $\cos. x = \sqrt{[1 - (\text{sen.}\, x)^2]}$, ſi avrà

$$\cos. x = \sqrt{(1 - \mathcal{A}^2 x^2 - 2 \mathcal{A} B x^3 - \text{ec.})} = 1 - \frac{\mathcal{A}^2 x^2}{2} + \text{ec.}$$

I coefficienti $\mathcal{A}$, B, ec. ſi conſiderano come indipendenti dall' arco x; per conſeguenza eſſi ſaranno i medeſimi per ogni altro arco. Soſtituendo dunque $n x$ in luogo di x, ſi avrà parimente

$$\text{sen.}\, n x = n \mathcal{A} x + n^2 B x^2 + n^3 C x^3 + \text{ec.}, \text{ e}$$

$$\cos.\, n x = 1 - \frac{n^2 \mathcal{A}^2 x^2}{2} + \text{ec.}$$

Dunque l' equazione precedente diverrà

$$\cos.\, x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1}$$

$$= \left[1 + n \mathcal{A} x \sqrt{-1} + n^2 \left(B \sqrt{-1} - \frac{\mathcal{A}^2}{2}\right) x^2 + \text{ec.}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Svolgaſi il ſecondo membro alla maniera del binomio, facendo per brevità

$$X = \mathcal{A} x \sqrt{-1} + n \left(B \sqrt{-1} - \frac{\mathcal{A}^2}{2}\right) x^2 + \text{ec.}, \text{ e ſi avrà}$$

$$\cos. x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n} (n X) + \frac{1 - n}{2 n^2} (n X)^2$$

$$+ \frac{(1 - n)(1 - 2 n)}{2 . 3 n^3} (n X)^3 + \text{ec.}, \text{ ovvero}$$

$$\cos. x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1} = 1 + X + \frac{1-n}{2} X^2$$

$$+ \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3} X^3 + \text{ec.}$$

Ora poichè i valori di *sen.* x e di *cos.* x devono esſere indipendenti dalla quantità arbitraria n, ne ſegue che tutti i termini del ſecondo membro, che ſi troveranno moltiplicati per una ſteſſa potenza di n, debbono diſtruggerſi reciprocamente. Non tenendo dunque conto che dei termini, nei quali, fatta la riduzione, n non ſi troverà più, è facile il vedere che la quantità X ſi ridurrà al ſuo primo termine $\mathcal{A} x \sqrt{-1}$, e che i coefficienti delle potenze di x ſi ridurranno a 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3}$ ec.; talchè ſi avrà ſemplicemente

$$\cos. x + \text{sen.}\, x \sqrt{-1} = 1 + \mathcal{A} x \sqrt{-1} + \frac{1}{2}(\mathcal{A} x \sqrt{-1})^2$$

$$+ \frac{1}{2.3}(\mathcal{A} x \sqrt{-1})^3 + \text{ec.}$$

Ed effettuando le potenze di $\sqrt{-1}$, e paragonando tra di loro le parti reali, e poi le parti immaginarie, ſi avrà

$$\text{sen.}\, x = \mathcal{A} x - \frac{\mathcal{A}^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\mathcal{A}^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$$

$$\cos. x = 1 - \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^4 x^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

Non resta dunque adesso che trovare la quantità A. Non supporremo, per rinvenirla, che il principio stabilito da Archimede, che il seno, ch'è la metà della corda dell'arco doppio, è minore dell'arco al quale corrisponde, e che la tangente è più grande di questo stesso arco. Si avrà dunque $\text{sen}. x < x$, e $\text{tang}. x > x$; ora essendo

$$\text{tang}. x = \frac{\text{sen}. x}{\cos. x} = \frac{\text{sen}. x}{\sqrt{[1 - (\text{sen}. x)^2]}}$$ si avrà

$$\frac{\text{sen}. x}{\sqrt{[1 - (\text{sen}. x)^2]}} > x,$$ e quindi

$\text{sen}. x^2 > x^2 (1 - \text{sen}. x^2)$, d'onde viene $\text{sen}. x > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$

Impiegando dunque l'espressione di già trovata di sen. x in serie, converrà che si abbia per quanto piccolo sia l'arco x

$$A x - \frac{A^3 x^3}{2.3} + \frac{A^5 x^5}{2.3.4.5} - \text{ec.} < x, > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}};$$

dunque anche dividendo per x, sarà

$$A - \frac{A^3 x^2}{2.3} + \frac{A^5 x^4}{2.3.4.5} - \text{ec.} < 1, > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

Essendo poi $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2}$, ed essendo

$\sqrt{(1+x^2)} > 1$, è chiaro che $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} > \frac{1}{1+x^2}$;

e nello stesso tempo si vede che $\frac{1}{1+x^2} > 1 - x^2$,

perchè la differenza ne è $\frac{x^4}{1+x^2}$; quindi la quantità ch'è

più grande di $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ sarà con maggior ragione più

grande di $1 - x^2$; talchè la specie d'equazione d'ineguaglianza suddetta si potrà ridurre alla seguente

$$A - \frac{A^3 x^2}{2.\ 3} + \frac{A^{5'} x^4}{2.\ 3.\ 4.\ 5} - \text{ec.} < 1, > 1 - x^2.$$

Ora, prendendo x tale che sia $\frac{A^2 x^2}{2.\ 3} < 1$, è chiaro che

la serie $A - \frac{A^3 x^2}{2.\ 3} + \text{ec.}$ sarà convergente e $< A$,

ma

ma $> \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}^3 x^2}{2.\ 3}$, perchè unendo insieme il secondo ed il terzo termine, il quarto ed il quinto, e così in seguito, non si avranno che delle quantità tutte negative, ed al contrario unendo insieme il terzo ed il quarto, il quinto ed il sesto, ec. non si avranno che delle quantità tutte positive. Dunque supponendo $x = \frac{V\,6}{\mathcal{A}}$, si avrà con maggior ragione $\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}^3 x^2}{2.\ 3} < 1$, ed $\mathcal{A} > 1 - x^2$; per conseguenza $\mathcal{A} > 1 - x^2$, e $< 1 + \frac{\mathcal{A}^3 x^2}{2.\ 3}$; il che dovendo aver luogo, per quanto piccolo che sia il valore di x, ne segue che si avrà necessariamente $\mathcal{A} = 1$. Infatti, se $\mathcal{A} = 1 + i$, essendo i una quantità qualunque piccolissima, positiva, basterà prendere x tale che $\frac{\mathcal{A}^3 x^2}{2.\ 3} < i$, ed allora la condizione di $\mathcal{A} < 1 + \frac{\mathcal{A}^3 x^3}{2.\ 3}$ non avrebbe più luogo. Parimente se $\mathcal{A} = 1 - i$, basterebbe fare $x^2 < i$, e l'altra condizione di $\mathcal{A} > 1 - x^2$ sarebbe in difetto. Dunque nel cerchio si ha necessariamente $\mathcal{A} = 1$.

Dunque le due ſerie ch' eſprimono i valori di sen. x, e cos. x ſi riducono alle ſeguenti:

$$\text{sen.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$$

$$\text{cos.}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

Riflessioni ſopra queſti due metodi, e quindi vera idea degli infiniteſimi nella riduzione delle funzioni circolari.

17. Dopo le coſe dette ai numeri 11, 14, relativamente allo ſpirito dell' infiniteſimo e dell' infinito impiegato nelle riduzioni in ſerie de le funzioni eſponenziali e logaritmiche, non v' ha più alcuna difficoltà per potere ſpiegare l' uſo di queſti principj anche per le funzioni circolari. Si vede ſubito a colpo d' occhio che la quantità n arbitraria di Lagrange corriſponde alla ſteſſa quantità n impiegata da Eulero, la quale ſola rappreſenta l' infinito, mentre la frazione d' un numeratore qualunque, che la contenga per denominatore, rappreſenta l' infiniteſimo. Si vede pure che tanto con l' uno che con l' altro metodo ſi tratta di fare con n due operazioni contrarie, per le quali alla fine del calcolo debbono ſvanire tutti i termini che la contengono. Nel metodo di Eulero l' una di queſte operazioni è fatta coll' infiniteſimo, e l' altra coll' infinito, cioè, da un' equazione identica ſi eſtrae la

radice n, e poi s' inalza la stessa equazione così ridotta alla potenza n. Per vederlo con tutta l'evidenza, nell' equazione fondamentale di Eulero

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. nz$$

sostituiscasi in luogo di z il suo valore $\frac{x}{n}$ si avrà

$$\left(\cos. \frac{x}{n} \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. \frac{x}{n}\right)^n = \cos. x \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. x.$$

Dico che questa ultima equazione non è altro che l'equazione identica

$$\cos. x \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. x = \cos. x \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. x,$$

dalla quale si è estratta prima la radice n, e poi si è elevata alla potenza n. Infatti, estraggasi la radice n; si avrà pei principj dimostrati nella Trigonometria

$$\cos. \frac{x}{n} \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. \frac{x}{n} = (\cos. x \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. x)^{\frac{1}{n}}.$$

Elevisi adesso questa ultima equazione alla potenza n; si avrà

$$\left(\cos. \frac{x}{n} \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. \frac{x}{n}\right)^n = \cos. x \pm \sqrt{-1} . \operatorname{sen}. x.$$

Non si può vedere con maggiore evidenza che l' infinitesimo e l' infinito non sono che segni o espressioni colle quali si fanno due operazioni l' una all' altra contraria, che si distruggono quindi reciprocamente, e che per tale

ragione deve ſvanire dal calcolo la quantità n che diverſamente poſta ſerve ad indicarli tutti e due.

Nella ſignificazione poi di sen. $z = z$, v' ha una particolarità che non abbiamo trovata nella riduzione delle altre funzioni, perchè eſſe erano eſpreſſioni puramente analitiche, e la preſente dipende dalle proprietà del cerchio. Queſta particolarità merita d'eſſere ſpiegata con tutta la chiarezza poſſibile; tanto più ch' eſſa comincerà a ſpargere della luce ſul principio dell' infiniteſimo impiegato con tanto ſucceſſo nell' applicazione del calcolo differenziale alla teoria delle curve.

Noi abbiamo veduto che Lagrange ha ſuppoſto eſſere sen. $x = \mathcal{A} x + B x^2 + C x^3 +$ ec., ed abbiamo trovato che tutti i termini del ſecondo membro di queſta equazione meno il primo ſvaniſcono alla fine del calcolo, non potendoli liberare dal fattore delle varie potenze di n. Si poteva dunque mettere fin dal principio ſolamente sen. $x = \mathcal{A} x$. Se Eulero aveſſe dunque fatto sen. $z = \mathcal{A} z$, ſaremmo nel medeſimo caſo delle riduzioni delle altre funzioni eſponenziali e logaritmiche, nelle quali fece $a^{\omega} = 1 + k\omega$ (numeri 9, 12), e ciò ſignificherebbe come in quelle funzioni, che non è veramente sen. $z = \mathcal{A} z$, ma che ſi può farlo, atteſo che gli altri termini ſono di già inutili per il fatto, perchè ſvaniſcono alla fine del calcolo. Ma qui ſi fa una coſa di più: ſi ſuppone il coefficiente $\mathcal{A} = 1$. Lagrange dimoſtra che tale difatti dev'eſſere il valore di $\mathcal{A}$, e lo dimoſtra con principj tratti ſolamente dalla Geometria elementare. Ciò potrebbe dunque baſtare per eſſere aſſicurati che ſi può fare sen. $z = z$,

e per vedere che ciò nulla altro ſignifica ſe non che ſi può prendere della riduzione in ſerie di sen. z, ſolamente il primo termine Az, e ſi può fare inoltre $A = 1$, perchè così dev' eſſere per le proprietà del circolo. Ma non ſi tratta, come abbiamo fatto rimarcare altre volte, di dimoſtrare la veracità dei riſultati trovati coi principj di Leibnizio, della quale neſſuno ne ha mai dubitato, nè poteva dubitare. Si deve far vedere quale è il vero ſpirito dell' introduzione dell' infiniteſimo, e quindi dimoſtrare come queſto principio poteva condurre a ſimile concluſione; così nel noſtro caſo ſi deve dimoſtrare come l' idea dell' infinitamente piccolo ſerve a trovare che dev' eſſere $A = 1$, e che perciò ſi può fare sen. $z = z$. Cerchiamo dunque di farlo.

Bene eſaminando la dimoſtrazione di Lagrange, con cui prova che $A = 1$, ſi vedrà ch' eſſa dipende da queſto principio, che ſi può prendere x tale che $\frac{A^2 x^2}{2.\ 3}$ ſia minore dell' unità; e ſi vedrà che tanto più la dimoſtrazione è rigoroſa, quanto più piccolo ſi potrà prendere x al di ſotto di quello che ſi richiede per ſoddisfare a queſta condizione. Dunque tanto più ſarà vero che $A = 1$, ſe ſi può prendere x minore di qualunque quantità data, lo che ſempre può farſi. Chiamiamo adeſſo infiniteſima la quantità minore di qualunque data, e vedremo che potremo dire che ſe x è infiniteſimo ſi ha $A = 1$, il che ſignifica, appoggiati a tutto il rigore della dimoſtrazione, che il primo termine della ſerie che rappreſenta il valore

di sen. x in funzione dell'arco x è eguale allo ſteſſo arco; e come a noi baſta queſto ſolo primo termine, come abbiamo veduto, potremo dire che ſi può fare il ſeno uguale all'arco, ſe l'arco è infiniteſimo.

Dietro a queſti o ad altri ſimili ragionamenti, certamente Leibnizio ha detto che in un cerchio il ſeno d'un arco infiniteſimo ſi confonde coll'arco ſteſſo; ragionamenti che rendono chiara ed evidente la ſuddetta propoſizione ſe ſono tutti indicati, mentre eſſa non è che una ſemplice aſſerzione nel modo in cui ci fu offerta, ed anche inviluppata da un oſcuro e ſtrano linguaggio.

Voglio far oſſervare che la dimoſtrazione di Lagrange ſi può non poco abbreviare, e renderla anche più adattata alla noſtra ſpiegazione dell'uſo degli infiniteſimi.

L'eſpreſſione ſeguente che Lagrange ha trovata nel principio della ſua dimoſtrazione

$$\mathcal{A}x - \frac{\mathcal{A}^3 x^3}{2.\ 3} + \frac{\mathcal{A}^5 x^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5} - \text{ec.} < x > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

darà, riducendo in ſerie la frazione $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ queſte tre eſpreſſioni

$$x$$

$$\mathcal{A}x - \frac{\mathcal{A}^3 x^3}{2.\ 3} + \frac{\mathcal{A}^5 x^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5} - \text{ec.}$$

$$x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{2} x^5 - \text{ec.},$$

delle quali l' intermedia è più piccola della prima, e più grande della terza. Dunque (n. 5) $Ax = x$, e quindi $A = 1$.

Nota. Le funzioni x^m, a^x, log. x, sen. x, e cos. x possono essere riguardate come le funzioni semplici analitiche di una sola variabile. Tutte le altre funzioni di x si compongono con queste per mezzo dell' addizione, sottrazione, moltiplicazione, o divisione, o sono rappresentate in generale da equazioni nelle quali entrano delle funzioni di queste medesime forme. Quindi conoscendo le funzioni prime delle funzioni semplici, si trovano facilmente le funzioni prime di tutte le funzioni composte possibili, e per mezzo di alcune operazioni ripetute si trovano poi successivamente le funzioni seconde, terze, quarte, ec. La riduzione in serie che noi abbiamo data delle funzioni a^x, log. x, sen. x e cos. x, le quali comprendono tutte le funzioni trascendenti, servono a trovare le così dette differenziali di siffatte funzioni, le quali poi altro non sono che i varj termini di queste stesse funzioni ordinate secondo le potenze di dx, dopo essersi messo $x + dx$ in luogo di x. Non abbiamo parlato della funzione x^m che comprende tutte le funzioni algebriche, perchè mettendo in questa funzione $x + dx$ in luogo di x, il suo svolgimento in serie dipende dal metodo di elevare un binomio ad una potenza qualunque, lo che si è sempre fatto senza ricorrere al principio degli infinitesimi. Ma per la teoria generale delle funzioni la formola del binomio resta dimostrata rigorosamente per tutti i valori dell' esponente interi o frazionarj, positivi o negativi; mentre il metodo comune con cui si giugne al suo svolgimento in serie, non può

ſervire a dimoſtrare rigoroſamente che il caſo in cui l' eſponente è intero poſitivo.

E' facile il dimoſtrare o colle ſemplici regole dell' aritmetica, o colle prime operazioni dell' algebra, che i due primi termini della potenza m del binomio $x + dx$ ſono $x^m + m.x^{m-1}dx$, qualunque ſia m. Ora per il teorema del numero 14 tutti gli altri termini ſi debbono derivare colla ſteſſa legge, talchè baſta conoſcere i due primi per avere tutti gli altri. Dunque potendoſi trovare con un metodo rigoroſo i due primi termini della potenza m del binomio $x + dx$, ſia m un numero qualunque intero o frazionario, poſitivo o negativo, tutto lo ſvolgimento del binomio reſta rigoroſamente dimoſtrato per tutti i valori di m.

Si oſſervi che il principio degli infiniteſimi per trovare le varie differenziali ſucceſſive entra in due maniere. Eſſo ſerve, primo, per isvolgere in ſerie le funzioni ſemplici, come abbiamo veduto nelle funzioni a^x, log. x, sen. x e cos. x: in queſto caſo abbiamo veduto che l' infiniteſimo e l' infinito non ſono che una medeſima quantità preſentata in due ſenſi oppoſti, che deve infine ſvanire dal calcolo. Secondo: eſſo ſerve per determinare la porzione della riduzione in ſerie, che forma le varie differenziali, dicendo che riguardando dx infiniteſimo ſvaniſcono i termini che comprendono delle potenze maggiori di dx in confronto delle minori. In queſto caſo abbiamo veduta la ſuperfluità dell' introduzione di queſto principio, per le nuove definizioni del Calcolo differenziale ed integrale date al numero 6.

ALCUNI CENNI

ſulle funzioni a due o più variabili, e ſull' equazioni.

18. Non abbiamo conſiderato fino al preſente che le funzioni d' una ſola variabile. Dal confronto dei due metodi differenti per ridurre in ſerie queſte funzioni, uno per mezzo degli infiniteſimi, e l' altro coi puri principj dell' algebra comune, abbiamo rilevato il vero ſpirito delle quantità infinitamente piccole, ed infinitamente grandi, ed abbiamo veduto in quale ſenſo debbano eſſere preſe queſte quantità. Si prevede facilmente che deve eſiſtere un ordine analogo di coſe anche per le funzioni di due o più variabili, come pure per le equazioni, le quali non ſono in fondo che altrettante funzioni d' una variabile ſe ne contengono due, di due variabili ſe ne contengono tre, ec. Si ſa inoltre che il principio degli infiniteſimi, anche col metodo leibniziano, non entra più nelle funzioni a due variabili, come principio neceſſario per la riduzione delle ſteſſe funzioni, perchè queſte ſono come altrettante compoſizioni d' una funzione ad una variabile, ma entra ſolamente nella determinazione delle differenziali, in quanto che ſi dice di omettere nella riduzione tutti i termini della ſerie, che contengono delle potenze dell' accreſcimento maggiori della prima, eſſendo queſti ultimi infiniteſimi d' ordine ſuperiori, che debbono ſvanire in confronto d' un infiniteſimo d' ordine inferiore, cioè il principio degli infiniteſimi entra ſolamente per quella

ſpecie di definizione che ſi dà delle differenziali ſucceſſive, alla maniera di Leibnizio. Ma per noi è tolta anche queſta oſcurità d'eſpreſſione, generalizzando la definizione che abbiamo data del calcolo differenziale (num. 6, 7) nel modo ſeguente: *Le differenziali ſucceſſive delle funzioni a più variabili ſono l'unione di tutti i termini omogenei delle ſteſſe funzioni, ridotte in ſerie ed ordinate ſecondo le varie potenze e prodotti degli accreſcimenti, aſtrazion fatta dei denominatori numerici*. Così l'unione dei termini omogenei del primo grado darà la differenziale prima; l'unione di quelli del ſecondo grado, la differenziale ſeconda, ec. Se ſi aveſſe per eſempio la funzione u a due variabili x, y, la quale ridotta in ſerie dopo aver meſſo $x+dx$ in luogo di x, $y+dy$ in luogo di y, per i quali cambiamenti u diventaſſe u_1, e ſi aveſſe

$$u_1 = u + Pdx + Qdy$$

$$+ \frac{1}{1.2}(Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2)$$

$$+ \text{ec.}$$

$Pdx + Qdy$ ſarebbe la differenziale prima della funzione u, $Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$ la differenziale ſeconda, ec.

19. Un'equazione a due variabili può preſentarſi ſotto queſta forma $f(x, y) = 0$. Egli è chiaro che dato il valore d'una di queſte variabili, oppure preſone uno arbitrariamente, ſarà determinato anche quello dell'altra. Segue da ciò, che ſe x, per eſempio, riceve un accreſcimento rappreſentato per dx, y deve provare un altro

cambiamento subordinato a quello di x; chiamando dy questo cambiamento, si avrà $y + dy$ in luogo di y. Ciò posto, essendo $x + dx$, ed $y + dy$ dei nuovi valori corrispondenti di x e di y, essi debbono parimente soddisfare all'equazione proposta, cioè deve ancora essere $f(x + dx, y + dy) = 0$. Ma per ipotesi x ed y soddisfano all'equazione primitiva $f(x, y) = 0$; dunque la precedente non racchiude realmente che due incognite dx e dy, l'una delle quali sarà determinata, quando all'altra si sarà assegnato un valore. Ora se noi consideriamo y come una funzione di x, abbiamo per le cose dette (num. 8)

$$y + \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

in luogo di y, quando x diventa $x + dx$. Dunque il cangiamento arrivato ad y sarà

$$\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

e perciò si avrà

$$dy = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Cio è necessario per l'intelligenza dei metodi di Arbogast e di Lagrange specialmente per le formole delle tangenti, e per le differenziali degli archi e delle aree delle curve.

USI ANALITICI

Del Calcolo Differenziale.

Scelgo due esempj di quistioni analitiche trattate col calcolo differenziale, i quali possono bastare per tutti relativamente all' oggetto contemplato in questa Memoria. Il primo è quello del valore delle frazioni che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, ed il secondo è quello dei *massimi* e dei *minimi*. Nel primo la quantità infinitesima si troverà essere una quantità indeterminata che potrà essere di qualunque grandezza o piccolezza, e quindi per questa e simili quistioni risulterà l'inutilità dell' introduzione di questa quantità sotto una tale denominazione. Nel secondo vedremo che i risultati sono tanto più esatti, quanto più piccolo è l' accrescimento della variabile, il quale deve per lo meno essere d' una certa determinata piccolezza, e quindi spiegheremo cosa veramente s' intenda di fare col prenderlo infinitamente piccolo.

Trovare col principio degli infinitesimi il valore dei rotti, i cui termini si riducono a zero.

20. Alcune funzioni si rappresentano talvolta in forma di rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$, quando si dà ad x un certo

valore, come $\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ diventa $\frac{0}{0}$ quando

$x = c$. Quantunque questi risultati sieno in apparenza indeterminati, sono suscettibili talvolta di valori assoluti.

Uno dei metodi per trovarli consiste nel cercare le varie differenziali successive del numeratore e del denominatore, finchè sostituito quel tale valore di x, si trovino per l'uno e per l'altro nel medesimo tempo due differenziali dello stesso ordine che non si riducono a zero. La frazione composta di questi tali risultati dà il valore cercato del rotto. Ecco come si procede col principio degli infinitesimi.

Sia $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ un rotto tale che sostituita a in luogo di x,

si abbia $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}$. Facciasi $f(a) = y$, e $\varphi(a) = z$,

e mettasi $a + dx$ in luogo di a, la frazione $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ diventerà

$$\frac{y + \frac{dy}{dx}dx + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}}{z + \frac{dz}{dx}dx + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}} \quad A$$

Trascurati i termini nei quali si trova dx^2, dx^3 ec.

come infinitesimi d'ordini superiori trascurabili in confronto di quelli che contengono dx, infinitesimo d'ordine inferiore, resta

$$\frac{y + \frac{dv}{dx}\, dx}{z + \frac{dz}{dx}\, dx}$$

e tolti i termini che sono eguali a zero

$$\frac{\frac{dv}{dx}\, dx}{\frac{dz}{dx}\, dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{d.\, f(a)}{d.\, \varphi(a)}$$

Questo ultimo risultato è il valore del rotto proposto, se pure i suoi termini non si annullino nuovamente, nel qual caso si continua la stessa operazione.

Trovare senza il soccorso degli infinitesimi il valore dei rotti, i cui termini si riducono a zero.

21. Sia $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ la frazione che si trova eguale a $\frac{0}{0}$.

Facciasi $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = y$, sarà $y\,\varphi(a) = f(a)$, e pren-

dendo le funzioni prime derivate, o le differenziali prime, o i secondi termini delle serie nelle quali si riducono i membri della suddetta equazione, quando si mette $a+dx$ in luogo di a, si avrà

$dy\varphi(a)+y\varphi'(a)dx = f'(a)dx$. Ora, essendo $\varphi(a)=0$

sarà $y\varphi'(a)dx=f'(a)dx$, e quindi $y=\frac{f'(a)dx}{\varphi'(a)dx}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$;

dunque la frazione $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ sarà eguale alla prima. Che se

i due termini di questa ultima si riducono ancora tutti

due a zero, si opera come prima, e si ottiene $y=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$

e così in seguito.

Riflessioni sopra questi due metodi, e quindi inutilità nel primo del principio degli infinitesimi, in queste quistioni.

22. Abbiamo dimostrato con Lagrange che la frazione

$\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{0}{0}$ sarà eguale a $\frac{f^{m}(a)}{\varphi^{m}(a)}$, e che quindi questa

ultima darà il valore assoluto della prima, se tutte le altre funzioni precedenti si annulleranno nel medesimo tempo. Si vede facilmente che tutto dipende da questo sem-

plice e noto principio: che le differenziali delle funzioni eguali ſono eguali, cioè che i termini corriſpondenti di due funzioni eguali ridotte in ſerie ordinate ſecondo l'accreſcimento della variabile ſono eguali. Ora egli è chiaro che l'eguaglianza di queſti termini ſuſſiſte, qualunque ſia la grandezza o la piccolezza dell'accreſcimento della variabile. Dunque è affatto ſuperfluo in queſti caſi di determinare in qualunque maniera il valore di dx, e quindi di prenderlo infinitamente piccolo.

Anzi, volendo procedere con rigore, ſi vedrà che il fare dx infiniteſimo, per cui dietro i principj di queſto genere di quantità ſvaniſcono i termini che contengono delle potenze di dx ſuperiori alla prima, ci dà in queſto genere di quiſtioni un riſultato che ha per lo meno l'apparenza di eſſere affatto contrario a quello che ſi deve ottenere, perchè eſſo ſia eſatto. In fatti la frazione $\mathcal{A}$ (num. 20) è eguale a $\frac{f(a+dx)}{\varphi(a+dx)}$. Ma per il principio degli infiniteſimi la frazione $\mathcal{A}$ reſta (togliendo anche le quantità $f(a)$, $\varphi(a)$ nulle) $\dfrac{\frac{dv}{dx}dx}{\frac{dz}{dx}dx} = \frac{dv}{dz} = \frac{df(a)}{d\varphi(a)}$,

e biſogna d'altronde laſciare ſempre $\frac{f(a+dx)}{\varphi(a+dx)}$ ſotto la ſteſſa forma, perchè ſvaniſcono ſolamente le potenze di

di dx maggiori della prima. Dunque si avrebbe

$$\frac{f(a+dx)}{\varphi(a+dx)}=\frac{df(a)}{d\varphi(a)}, \text{ mentre dev' essere}$$

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{df(a)}{d\varphi(a)}, \text{ altrimenti il metodo non servirebbe}$$

più all'oggetto proposto.

Se invece impiegate dx come una quantità arbitraria introducendola e levandola, voi vedrete che otterrete col metodo il più rigoroso l'equazione finale $\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, senza che la sua grandezza, piccolezza o natura vi abbia parte alcuna.

Nella frazione $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ mettiamo dunque prima $a+dx$ in luogo di a, e dopo aver fatta questa sostituzione rimettiamo di nuovo a in luogo di $a+dx$. Egli è evidente che con queste due sostituzioni l'una all'altra contraria è in fondo la stessa cosa che non averne fatta veruna, perchè è il medesimo che aver aggiunto dx ad a, ed aver fatto poi $dx=0$, il che vuol dire mettere sempre a per a.

La prima sostituzione di $a+dx$ in luogo di a ci dà

$$\frac{f(a+dx)}{\varphi(a+dx)}=\frac{f(a)+f'(a)dx+f''(a)\frac{dx^2}{1.2}+\text{ec.}}{\varphi(a)+\varphi'(a)dx+\varphi''(a)\frac{dx^2}{1.2}+\text{ec.}}$$

ovvero togliendo nel fecondo membro i termini $f(a)$ e $\varphi(a)$ che fono eguali a zero, e dividendo per dx tanto il numeratore, quanto il denominatore,

$$\frac{f(a+dx)}{\varphi(a+dx)}=\frac{f'(a)+f''(a)\frac{dx}{1.2}}{\varphi'(a)+\varphi''(a)\frac{dx}{1.2}}$$

La feconda foftituzione poi di a in luogo di $a+dx$, ch' equivale a fare $dx=0$, ci dà

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Così nel tempo fteffo che abbiamo dimoftrato col fatto che l' accrefcimento della variabile è in quefto genere di quiftioni una quantità arbitraria, di cui è inutile conofcere la grandezza, la piccolezza o la natura, abbiamo anche data un' altra maniera di dimoftrare il metodo detto delle differenziazioni per ritrovare il valore affoluto delle frazioni che fi prefentano fotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Trovare il maſſimo o minimo valore d'una funzione col principio degli infiniteſimi.

23. Sia y una funzione qualunque di x. Suppongaſi che x abbia quel tale valore che rende maſſimo, o minimo il valore di queſta funzione. Segue dalle proprietà dei maſſimi e dei minimi, che ſe ſi cercano i valori di y corriſpondenti a $x - dx$ ed a $x + dx$, ſi debbono ottenere nell'uno e nell'altro caſo dei riſultati minori del maſſimo, o maggiori del minimo. Rappreſentando con ${}_{,}y$ il valore di y corriſpondente a $x - dx$, e con $y_{,}$ il valore di y corriſpondente a $x + dx$, ſi avrà pel teorema di Tailoro

$$ {}_{,}y = y - \frac{dy}{dx}\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.} $$

$$ y_{,} = y + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.} $$

Ora preſo dx infiniteſimo, tutti i termini delle due ſerie precedenti, cominciando dal terzo, debbono ſvanire in confronto del ſecondo per la proprietà degli infiniteſimi. Non reſta dunque che

$$ {}_{,}y = y - \frac{dy}{dx}dx $$

$$ y_{,} = y + \frac{dy}{dx}dx $$

Ciò posto, perchè y sia maggiore tanto di $,y$, quanto di $y,$, ovvero perchè y sia minore tanto di $,y$, quanto di $y,$ bisogna che sia necessariamente

$$\frac{dy}{dx}dx = 0, \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Questa ultima equazione dunque darà il valore che deve avere x, perchè la funzione y sia la massima, o la minima. Il segno poi del terzo termine $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2}$ farà conoscere se il valore di x trovato colla precedente equazione dia un massimo, o un minimo. Il segno negativo darà un massimo, ed il segno positivo darà un minimo.

Trovare il massimo o il minimo valore d' una funzione senza il soccorso degli infinitesimi.

24. Sia $f(x)$ la funzione di cui si cerca il valore che deve avere x, perchè divenga o un massimo, o un minimo. Egli è chiaro che la condizione del massimo sarà

$$f(x+dx) < f(x), \text{ ovvero } f(x+dx) - f(x) < 0$$

e quella del minimo

$$f(x+dx) > f(x), \text{ ovvero } f(x+dx) - f(x) > 0,$$

qualunque sia il segno di dx o positivo, o negativo, e qualunque sia il suo valore.

Riducendo in ferie $f(x+dx)$, ed efeguendo la fottrazione indicata, farà per il maffimo

$$f'(x)\,dx+f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+\text{ec.}<0$$

e per il minimo

$$f'(x)\,dx+f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+\text{ec.}>0$$

Ora abbiamo veduto (numero 3) che fi può fempre prendere dx così piccolo che il valore affoluto del termine

$f'(x)\,dx$ fia più grande della fomma degli altri $f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+$ ec.

Dunque la quantità $f'(x)\,dx+f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+$ ec. diventerà pofitiva, o negativa, fecondo che lo farà $f'(x)\,dx$; ma quefta cambia di fegno fecondo che cambia la quantità dx; dunque farà impoffibile che la condizione del maffimo, o del minimo abbia luogo a meno che non fia

$f'(x)=0$, ovvero $\frac{dy}{dx}=0$, fe $f(x)=y$.

Fatta dunque $f'(x)=0$, bifognerà che fia

$f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+$ ec. <0 per il maffimo, e $f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}+$ ec. >0

per il minimo. Prendasi dx tale che il valore assoluto

di $f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}$ sia maggiore della somma degli altri ter-

mini seguenti $f'''(x)\,\frac{dx^3}{1.2.3}$ + ec.; allora la quantità

$f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2}$ sarà positiva, o negativa secondo che lo sarà

$f''(x)$, perchè dx^2 resta sempre positivo, qualunque sia il segno di dx. Sarà dunque $f''(x) < 0$, ovvero $f''(x)$ negativo per il massimo, e $f''(x) > 0$, ovvero $f''(x)$ positivo per il minimo.

Così l'equazione $f'(x) = 0$, servirà a determinare il valore che si deve dare ad x, perchè $f(x)$ sia un massimo, o un minimo, e le espressioni $f''(x) < 0$, o $f''(x) > 0$, cioè il segno di $f''(x)$ indicherà se $f(x)$ è un massimo, o un minimo.

Confronto di questi due metodi,
e quindi vera idea del principio degli infinitesimi
in questo genere di quistioni.

25. Si tratta di provare con tutti due i metodi che dev' essere $f'(x)$, ovvero $\frac{dy}{dx} = 0$, se si vuole che la funzione $f(x) = y$ sia un massimo, o un minimo. Col

primo metodo si trova ciò per mezzo del principio degli infinitesimi, per cui debbono svanire tutti gli infinitesimi d'ordini superiori in confronto d'un infinitesimo d'ordine inferiore. Col secondo metodo poi se ne ottiene una rigorosa dimostrazione facendo uso della proposizione del num.

3, per cui nella serie $f(x) + f'(x)\,dx + f''(x)\frac{dx^2}{1.2} +$ ec.

si può sempre prendere dx tale che un termine qualunque sia più grande della somma di tutti gli altri.

Questi due metodi, benchè a prima vista differenti, pure se si esaminino con un poco d'attenzione, si vedrà che nel fondo sono i medesimi. La stessa proposizione del numero 3 impiegata con tanto successo da Lagrange, è quella che serve di fondamento anche al primo metodo trattato col principio degli infinitesimi. Non v'ha altra differenza che nel primo questa proposizione è sottintesa, o al più solamente indicata con quella espressione di quantità infinitesima, come or ora vedremo, mentre da Lagrange essa è presentata e spiegata in tutto il dettaglio.

Egli è chiaro che il prendere dx tale che dia

$$f'(x)\,dx > f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2} + f'''(x)\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

non vuol dire altro se non che dare a dx un tal valore

che di tutta la serie $f'(x)\,dx + f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2} +$ ec.

$f'(x)\,dx$ rappresenti le parte maggiore, o la sola, im-

portante e necessaria all' oggetto che si contempla, ch'è quanto a dire tale che porti il segno che deve avere la somma di tutta la stessa serie. Infatti perchè $f(x)$ sia un massimo, o un minimo, dev'essere minore, o maggiore di zero tanto la somma positiva, quanto la somma negativa

$$\text{di } f'(x)\, dx + f''(x)\, \frac{dx^2}{1.2} + f'''(x)\, \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Dunque con questo tale valore di dx perchè $f(x)$ sia un massimo, o un minimo, dovrà essere minore, o maggiore di zero tanto $f'(x)\, dx$ positivo, quanto $f'(x)\, dx$ negativo: il che è lo stesso che dire che il dare a dx questo tale valore fa sì che in luogo di tutta la serie basta prendere il solo primo termine, restando come inutili all' oggetto gli altri termini seguenti.

Che se invece di prendere dx di questa tale piccolezza lo prendete ancora più piccolo, tanto più saranno vere tutte le conseguenze che ne abbiamo dedotte. Sarà dunque vero con maggior ragione tutto ciò che dicemmo se si fa dx minore di qualunque quantità data.

Voi vedete dunque a tutta evidenza che il dire che,

prendendo nella serie $f'(x)\, dx + f''(x)\, \frac{dx^2}{1.2} +$ ec. la

quantità dx infinitamente piccola, svaniscono tutti i termini dopo il primo come infinitesimi d' ordini superiori, vuol dire che prendendo dx minore di qualunque quantità data dev' essere necessariamente

$f(x) > f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2} + f'''(x)\,\frac{dx^3}{1.2.3} +$ ec., e quindi

$f'(x)$ deve neceſſariamente portare il ſegno di tutta la

ſerie $f'(x)\,dx + f''(x)\,\frac{dx^2}{1.2} +$ ec., per cui tutti gli

altri termini ſono inutili, o ſono come non eſiſteſſero all' oggetto.

Riſulta dunque da queſte rifleſſioni che il metodo degli infinitamente piccoli di Leibnizio, applicato alla ſoluzione di queſti problemi, ſi appoggia alla medeſima propoſizione del numero 3, alla quale s' appoggia il metodo di Lagrange. Tutta quella oſcurità e quella ſpecie di miſtero che preſenta il primo, dipende dal tacere queſta ſteſſa propoſizione, quantunque d' altronde s' intenda d' indicarla coll' eſpreſſione di quantità infinitamente piccola.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA TEORIA DELLE CURVE.

Espressione della sottotangente trovata col principio degli infinitesimi.

26. Leibnizio considera le curve come poligoni composti d' un numero infinito di lati infinitamente piccoli, e riguarda le tangenti come le prolungazioni di questi lati. Dietro a questa maniera di considerare le curve egli trova l' espressione della sottotangente nella maniera che segue.

Sia (fig. 1) Mm uno di questi lati infinitamente piccoli della curva $SMmR$. Si prolunghi Mm fino a che incontra uno degli assi AB in T; sarà MT la tangente condotta dal punto M. Si tiri un'altra ordinata mp parallela all' altra MP, che le sarà pure infinitamente vicina, e finalmente si meni Mr parallela ad AB.

Sia ora $AP = x$, e $PM = y$; sarà $mr = mp - MP = y + dy - y = dy$, e $Mr = Pp = x + dx - x = dx$.

Per la similitudine dei triangoli TMP, Mmr si ha

$$mr : Mr :: MP : PT$$

ovvero

$$dy : dx :: y : PT,$$

e quindi

$$PT = y\,\frac{dx}{dy}.$$

Espressione della sottotangente trovata senza il principio degli infinitesimi.

27. Sieno x ed y le coordinate AP, MP (fig. 2) del punto M, da cui si vuole condurre la tangente. Se nell' equazione della curva che può sempre presentarsi sotto questa forma $y = f(x)$, si mette $x + dx$ in luogo di x, ed $y + dy$ in luogo di y, si avrà l' espressione seguente di dy, ordinata in serie ascendente secondo le potenze di dx (num. 19).

$$dy = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

serie che sarà tanto più convergente, quanto più sarà piccola la quantità dx.

Riguardinsi dx, dy come delle nuove coordinate MQ, QN della stessa curva, e l' origine delle quali sia il punto M. Si sa che l' equazione della retta MT riportata agli stessi assi MQ, QN è $QN' = a\,dx$, (rappresentando per a la tangente dell' angolo $N'MQ$).

Facciasi $QN' = K$; dico che se $a = \frac{dy}{dx}$, cioè se $K = \frac{dy}{dx}\,dx$

è l' equazione della retta MT, questa retta è tangente, cioè tra essa e la curva non si può condurre verun' altra retta.

Si ha $NN' = QN - QN' = dy - K$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Sia $K' = \mathcal{A}dx$ l'equazione d'un' altra retta qualunque MZ,

farà $N'N'' = QN' - QN'' = K - K' = \left(\frac{dy}{dx} - \mathcal{A}\right) dx.$

Ora, purchè alcuno dei coefficienti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec.

non divenga infinito, si potrà prendere dx o positivamente, o negativamente d'una tale piccolezza, che l'espressione

$\left(\frac{dy}{dx} - \mathcal{A}\right) dx$ sia maggiore di $\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$

In questa ipotesi $N'N''$ sarà maggiore di NN', e $n'n''$ maggiore di nn'. La retta MZ non potrà dunque, qualunque sia $\mathcal{A}$, passare tra la curva MN e la retta MT dentro lo spazio $N''n''$. Dunque la retta MT è tangente se essa ha

per equazione $K = \frac{dy}{dx}\,dx$, cioè se l'espressione della

tangente dell'angolo $N'MQ$ è eguale al primo coefficiente differenziale dell'equazione alla curva.

Abbiamo supposto che il coefficiente $\frac{d^2y}{dx^2}$ del secon-

do termine della ferie

$$dy = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

fia pofitivo; rifulta da quefta ipotefi, che la quantità $dy - k$ refterà pofitiva, qualunque fia il fegno che abbia dx, purchè fi prenda quefta quantità così piccola che il termine $\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{1.2}$ forpaffi la fomma di tutti quelli che lo feguono; dunque la curva fi troverà al difopra della fua tangente immediatamente avanti e dopo il punto M, e prefenterà per confeguenza la fua conveffità all'affe AC.

Avrebbe luogo il contrario fe $\frac{d^2y}{dx^2}$ foffe negativo; poichè la differenza $dy - k$ farebbe negativa, e la curva farebbe in quefto cafo al difotto della fua tangente immediatamente avanti e dopo il punto di contatto M, e quindi la curva prefenterebbe la fua concavità allo fteffo affe AB. Si può dunque giudicare dal fegno di $\frac{d^2y}{dx^2}$ com'è rivolta la concavità o la conveffità della curva, in un punto qualunque per rapporto all'affe delle afciffe.

Confronto dei due metodi precedenti per condurre le Tangenti alle curve, e quindi vera idea che deve formarsi dell'uso degli infinitesimi per la soluzione di questi problemi.

28. Nel metodo di Lagrange si dimostra che se $\frac{dy}{dx}$ (fig. 2) è eguale alla tangente dell'angolo $N'MQ$, o del suo eguale MTP, la linea MT è tangente, cioè si dimostra che se

$$\frac{dv}{ax} = \frac{N'Q}{MQ} = \frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT},$$

ch'è quanto dire se

$$dy : dx :: y : PT$$

tra la retta MT e la curva MN non si può condurre verun' altra retta, il che fa che MT sia tangente.

Nel metodo di Leibnizio poi si fa coincidere (fig. 1) Mm parte (che si chiama infinitesima) di MT colla porzione di curva corrispondente. L'ammettere questa coincidenza di tangente e di curva fa che per il fatto non è più possibile condurre dal punto M verun' altra retta tra la curva SMR e la linea MT, perchè ciascheduna altra retta differente da MT, che si dirigerebbe in conseguenza al disopra o al disotto della stessa MT, si dirigerebbe pure nella stessa maniera e nello stesso tempo al disopra o al disotto della curva. Dunque la coincidenza della retta MT colla curva, per una quantità qualunque Mm

rende per il fatto MT tangente. Ciò posto, condotta dal punto m, termine della coincidenza Mm, la retta mp parallela ad MP, si ha per la similitudine dei triangoli Mmr, MTP la stessa proporzione

$$dy : dx \; :: \; y : PT.$$

I due risultati sono dunque i medesimi in amendue i metodi, e danno sempre la stessa formola della sottotangente

$$PT = y \frac{dx}{dy}.$$

Ma mentre col metodo di Lagrange la proposizione è dimostrata rigorosamente, con quello di Leibnizio essa s'appoggia al principio che la curva si confonde colla tangente per una parte infinitamente piccola, principio che resta una semplice asserzione nel modo in cui ci viene presentato. Dietro al nostro piano che ci siamo proposti, andiamo dunque a vedere cosa significhi questa coincidenza, ed in qual senso essa sia vera.

E per assicurarsi prima di tutto che ammessa la coincidenza tutto il resto ne segue necessariamente, osservisi che facendo cadere MN sopra MN' (fig. 2), la quantità NN' si rende nulla, e quindi si ha $QN = QN'$. Si avrà dunque dietro a questa ipotesi $QN - QN' = 0$. Sia K la tangente dell'angolo $N'MQ$, o del suo eguale MTP, oppure sia $N'Q = k\,dx$, essendo

$$NQ = \frac{dy}{dx} dx + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

ſarà

$$NQ - QN' = \left(\frac{dy}{dx} - k\right) dx$$

$$+ \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.} = 0.$$

Dunque poſta l'ipoteſi che la curva ſi confonda con MT, ſi ha neceſſariamente

$$\frac{dy}{dx} = k$$

oſſia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QN'}{MQ} = \frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT}.$$

Di più la ſteſſa ipoteſi rende neceſſariamente qualunque $N'N''$ maggiore di $NN' = 0$, cioè rende impoſſibile il poter condurre alcun'altra retta tra MT e la curva, il che è lo ſteſſo che dire che ſa MT tangente. Finalmente rende nulli tutti gli altri termini

$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$, da cui ſi vede che

non ſono omeſſi come quantità traſcurabili in confronto di alcune altre, ma come quantità che diventano effettivamente nulle per l'ipoteſi della coincidenza. Tutto dunque conſiſte nella ſpiegazione di ſiffatta ipoteſi di far confondere la curva colla tangente, perchè una volta che

queſta

questa si è ammessa, tutto il resto ne segue necessariamente con tutto il rigore della dimostrazione.

Vedremo, quando parleremo delle differenziali dell' arco (num. 31) che ridotte in serie ordinate secondo le potenze di $dx = MQ$, le due quantità MN, $MN' + NN'$, i primi termini di queste serie sono eguali. Vedremo innoltre che il primo termine della serie che rappresenta il valore di $MN' + NN'$ è la stessa prima quantità MN', e vedremo finalmente che ciò sarà vero quando dx sarà tale che il primo termine di ciascheduna di queste serie sarà maggiore della somma di tutti gli altri, e molto più vero ancora quando dx sarà d'un valore inferiore a quello che si conviene per ottenere la suddetta condizione.

Ciò posto, noi potremo dunque dire che se dx è minore di qualunque data, il primo termine della serie che rappresenta MN è eguale alla quantità MN'. Potremo dunque far coincidere questo primo termine di MN con MN'. Sostituite adesso all'espressione di quantità minore di qualunque data quella d'infinitesima, considerandola come un'espressione che debba significare la stessa cosa, e vedrete che potrete dire con Leibnizio che la tangente si confonde colla curva per una porzione d'arco infinitesimo, avvertendo che dell'arco di curva corrispondente non intendete di prendere che il primo termine della serie in cui fu ridotto.

Che se prendete poi successivamente questi primi termini, i quali tutti saranno eguali alle porzioni di tangenti rispettive, voi vedrete che potrete dire che la curva può considerarsi un poligono, i cui lati sono ad uno ad

uno eguali alla porzione di tangente corriſpondente ad un accreſcimento dell'aſciſſa minore di qualunque dato.

Si vede dunque che il metodo di Leibnizio ſi appoggia allo ſteſſo principio del metodo di Lagrange, cioè alla propoſizione dimoſtrata al num. 3, e che la ſola oſcurità nel primo non proviene che dal ſupporlo tacitamente invece d'indicarlo come principio fondamentale.

A riguardo di queſta propoſizione del numero 3 voglio fare un'oſſervazione che io credo importante per rilevare meglio lo ſpirito di tutti e due i metodi. Va bene che ſi poſſa prendere dx tale, che in una ſerie ordinata ſecondo le potenze della ſteſſa dx, il primo termine ſia maggiore della ſomma di tutti gli altri; ma egli è poi vero da un altro canto, che ſpecialmente in queſto genere di quiſtioni relativamente alle curve è neceſſario prenderlo della maſſima piccolezza poſſibile, ſenza di che la ſuddetta propoſizione ſarebbe inutile all'oggetto. Infatti per dimoſtrare che una linea MT (fig. 2) è tangente ad una curva MN, biſogna dimoſtrare che per quanto piccolo ſia MQ tra la porzione di curva e di tangente corriſpondente non può paſſare alcun'altra retta, e ciò è tanto più neceſſario, quanto che in molte ſpecie di curve una linea può eſſere tangente ad un tal punto, e nonnoſtante un'altra retta condotta dallo ſteſſo punto potrebbe a certe diſtanze paſſare tra la tangente e la curva. E' dunque neceſſario prenderlo di quella tale piccolezza che, qualunque ſia la curva tra eſſa e la tangente non ſi poſſa trovare alcun'altra retta. Queſta tale piccolezza di dx è quella, come riſulta dal metodo di Lagrange, che dà

$$\left(\frac{dy}{dx} - A\right) dx > \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.};$$

e ſiccome ciò dev' eſſere per qualunque valore di A, così egli è chiaro che dx deve prenderſi neceſſariamente minore di qualunque quantità data, unica eſpreſſione che può ſempre rendere $\left(\frac{dy}{dx} - A\right) dx$ maggiore di tutti gli altri termini per qualunque valore di A.

Lacroix, nel confronto che fa di tutti i metodi differenti del Calcolo differenziale, non fa in fondo ſe non che dimoſtrare che le formole finali ſono ſempre identiche, ed i riſultati i medeſimi, nonnoſtante ai diverſi principj che ci conducono, ed alla differenza di notazioni. Egli ha detto ſolamente qualche coſa per far rilevare lo ſpirito del principio degli infiniteſimi applicato alle tangenti. Io non ho riportata queſta ſua ſpiegazione, perchè non mi riuſcì di piena ſoddisfazione. Laſcio alla curioſità dei lettori il conſultarla, ed il confrontarla colla mia.

Trovare la differenziale dell' arco delle curve per mezzo degli infiniteſimi.

29. Preſo l' arco Mm (fig. 1) infinitamente piccolo, eſſo ſi confonderà colla tangente. Dunque Mmr ſarà un triangolo rettilineo rettangolo in r, e quindi ſi avrà

$$Mm = \sqrt{(\overline{Mr}^2 + \overline{mr}^2)}.$$

Facciaſi $Mm = dx$; poichè è $Mr = dx$, $mr = dy$, ſi avrà $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, e queſta ſarà l' eſpreſſione della differenziale dell' arco $SM = z$.

Trovare la differenziale dell' arco senza ricorrere al principio degli infinitesimi.

30. **E**gli è chiaro che la lunghezza dell' arco d' una curva dev' essere una funzione della sua ascissa o della sua ordinata, e che per conseguenza la differenziale di questa quantità deve poter esprimersi per mezzo di queste variabili e delle loro differenziali.

Se si chiama z l' arco DM (fig. 3), essendo $x = AP$, z sarà una funzione di x, e si avrà

$$DM + Mom = z + z' \frac{dx}{1} + z'' \frac{dx^2}{1.2} + z''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

quando x si cambierà in $AP + Pp = x + dx$, rappresentando per z', z'', z''' ec. i coefficienti differenziali $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ ec., la cui derivazione successiva è tale come si fa (num. 4) che quando si conosce il primo si possono conoscere tutti gli altri.

Ciò posto, se si prendono le ordinate PM, pm tanto vicine l' una all' altra che la curva non subisca alcuna inflessione tra di esse; che si meni MT tangente, e che si tiri la corda Mm, si vedrà facilmente che l' arco Mom è maggiore della corda Mm, e minore della somma dei due lati $MN + Nm$. Segue da ciò che la riduzione in serie del piccolo arco Mom rappresentata per quello che dicemmo sopra da

$$z' \frac{dx}{1} + z'' \frac{dx^2}{1.2} + z''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

deve avere un valore medio tra quello di Mm, e di $MN + Nm$. Calcoliamo dunque ciascheduno di questi due ultimi.

Il triangolo rettangolo MmQ darà

$$Mm = \sqrt{(\overline{MQ}^2 + \overline{mQ}^2)};$$

ma $MQ = dx$, $mQ = pm - PM = pm - pQ$, ed essendo inoltre pm ciò che diventa y quando x si cambia in $x + dx$, si avrà per la riduzione in serie di mQ,

l'espressione $y' \frac{dx}{1} + y'' \frac{dx^2}{1.2} + y''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$,

rappresentando per y', y'', y''' i coefficienti differenziali

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec. La suddetta formola si potrà anche per più brevità mettere sotto la forma $(y' + p\,dx)\,dx$,

facendo $p = \frac{y''}{1.2} + \frac{y'''}{1.2.3}dx + \text{ec.}$ Sostituendo questo

valore, come pure quello di MQ, si avrà

$$Mm = \sqrt{[dx^2 + (y' + p\,dx)^2 dx^2]}$$

$$= dx\,(1 + y'^2 + 2py'dx + p^2dx^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Facciasi ancora per maggiore semplicità

$$2 p y' + p^2 d x = q$$

si avrà

$$M m = d x \left[(1 + y'^2) + q d x \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Estraendo la radice quadrata per mezzo della formola del binomio, ne risulterà

$$M m = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} d x + \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} d x^2 + \text{ec.}$$

Si troveranno i valori di MN e di NQ per mezzo dei triangoli simili TPM, MQN, i quali daranno

$$M N = \frac{T M \times M Q}{P T} = d x \sqrt{(1 + y'^2)}$$

$$N Q = \frac{M P \times M Q}{P T} = d x \, y',$$ (trovando prima il valore di TM per mezzo del triangolo TMP rettangolo in P, di cui sono noti gli altri due lati). Ora essendo $mN = mQ - NQ$, si avrà

$$m N = y'' \frac{d x^2}{1 . 2} + y''' \frac{d x^3}{1 . 2 . 3} + \text{ec.}$$

aggiungendo a questa serie il valore di MN, il risultato

$$d x \sqrt{(1 + y'^2)} + y'' \frac{d x^2}{1 . 2} + y''' \frac{d x^3}{1 . 2 . 3} + \text{ec.}$$

farà la riduzione in ferie del valore di $MN + mN$.

E' facile il vedere che fe la curva volgeffe la fua concavità verfo l'affe del'e afcife, fi avrebbe invece $mN = NQ - mQ$; ma l'efpreffione mN avrebbe ancora lo fteffo primo termine che abbiamo trovato fopra, ed il coefficiente y'' farebbe negativo.

Unendo adeffo i rifultati che fi fono trovati, fi avranno le tre ferie feguenti:

$$Mm = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} q\, dx^2 + \text{ec.}$$

$$Mom = \quad \frac{z'}{1} dx + \quad \frac{z'' dx^2}{1.\ 2} + \text{ec.}$$

$$MN + mN = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx + \quad \frac{y'' dx^2}{1.\ 2} + \text{ec.}$$

la cui intermediaria efprime una quantità comprefa tra i valori delle altre due; ma quefte ultime hanno il medefimo primo termine $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$; dunque per quello che fi è detto (num. 5) farà $z' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$. Rimettendo in luogo di z', y' le efpreffioni differenziali dei coefficienti che rapprefentano, fi avrà

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

ovvero

$$dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Confronto dei due metodi precedenti, e quindi vero spirito del principio degli infinitesimi impiegato a trovare le differenziali dell' arco.

31. La più piccola riflessione sopra il secondo metodo per trovare la differenziale dell' arco alla maniera di Arbogast e di Lagrange basta per vedere ch' esso è precisamente la più rigorosa dimostrazione del primo. Ma noi dobbiamo vedere anche in questo caso come il principio degli infinitesimi può condurci ad un medesimo risultato; e quindi rilevare il vero spirito di questo principio applicato a trovare la differenziale dell' arco.

Riflettasi prima di tutto che il trovare la differenziale dell' arco DM (fig. 3) non vuol dire trovare l' espressione totale dell' arco Mom corrispondente all' aumento MQ dell' ascissa AP, ma vuol dire trovare il primo termine della serie che rappresenta quest' arco Mom, essendosi prima ordinata questa serie secondo le varie potenze dell' accrescimento $MQ = dx$ dell' ascissa, e ciò dietro alle vere ed esatte definizioni di già date del Calcolo differenziale (num. *6* e segg.)

Ciò posto, noi abbiamo veduto (num. precedente) che chiamando z l' arco DM, si ha (considerando Mom come accrescimento di DM)

$$Mom = z' \frac{dx}{1} + z'' \frac{dx^2}{1.2} + z''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Dunque il primo termine di Mom, o la differenziale

dell'arco DM è eguale a $z'\frac{dx}{1}$. Ma abbiamo dimoſtrato che

$$z'\frac{dx}{1} = (1 + y_{\prime}{}^{2})^{\frac{1}{2}} dx$$

dunque il primo termine dell'arco Mom, o la differenziale prima di DM è eguale $(1 + y_{\prime}{}^{2})^{\frac{1}{2}} dx$. Finalmente vedemmo che $(1 + y_{\prime}{}^{2})^{\frac{1}{2}} dx = MN$; dunque la differenziale di DM, o il primo termine di $Mom = MN$. Potrò dunque rappreſentare coteſto primo termine (fig. 1) con Mm coincidenza del primo termine di Mom (fig. 3) con la porzione di tangente MN ch'è ad eſſo eguale, ch'è quanto dire, potrò rappreſentare la differenziale dell' arco con una porzione di tangente e di curva. Ora ſi ebbe $z'dx = (1 + y_{\prime}{}^{2})^{\frac{1}{2}} dx = MN$, unicamente perchè dx ſi è preſo tale che ciaſcheduno dei primi termini delle tre ſerie ordinate ſecondo le varie potenze di dx, le quali rappreſentano i valori di Mm, Mom, $MN + mN$, ſia maggiore della ſomma di tutti gli altri ſeguenti, e lo ſi avrebbe avuto ancora più, ſe ſi foſſe preſo dx minore di quello che ſi richiede per ottenere la ſuddetta condizione. Dunque con maggior ragione (fig. 1) prendendo $dx = Mr$ minore di qualunque quantità data, ſi avrebbe Mm, porzione di tangente corriſpondente, coincidente coll'arco Mm, ſe queſt' arco Mm rappreſenta il primo termine dell'accreſcimento di SM ordinato ſecon-

do le potenze di dx. Dunque prendendo dx infinitesimo (usando la espressione d'infinitesimo come equivalente a quella di quantità minore di qualunque data) la differenziale dell'arco SM sarà Mm, primo termine della porzione infinitesima di curva coincidente colla porzione infinitesima di tangente che le è eguale; e questo è ciò certamente che ha inteso dire Leibnizio, dicendo che la differenziale dell'arco SM, o l'arco infinitesimo Mm si confonde colla tangente.

Abbiamo trovato essere cotesto primo termine

$$Mm = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}; \text{ dunque dev' essere}$$

$$\overline{Mm}^2 = dx^2 + dy^2;$$

dunque condotta dal punto m, termine della coincidenza dell'arco e della tangente, mp parallela ad MP, nel triangolo rettangolo Mmr sarà $Mr = dx$, e $rm = dy$. Dal che si vede che ammessa la coincidenza dell'arco e della tangente (lo che va a corrispondere perfettamente all'idea di considerare la curva un poligono) si ottiene subito la differenziale dell'arco.

Notisi che per ragioni consimili a quelle che abbiamo date sopra nel confronto dei varj metodi per trovare l'equazione della sottotangente, non è altrimenti indifferente prendere dx di qualunque grandezza, ma egli è necessario prenderlo almeno tale che renda il primo termine maggiore della somma di tutti gli altri.

Il principio degli infinitesimi s'appoggia dunque anche in queste quistioni alla proposizione del num. 3, che in siffatto metodo si sottintende, e questo principio dà dei risultati esatti, in quanto che, prendendo dx minore di qualunque data, la suddetta proposizione vi è compresa in tutta la sua estensione.

Trovare la differenziale dell' area delle curve col principio degli infinitesimi.

32. Per trovare l' espressione della differenziale dell'area d' una curva qualunque $SMmR$, prendasi (fig. 1) Mm infinitamente piccolo, conducasi mp parallela ad MP, e Mr parallela ad AB. Lo spazio $MmpP$ sarà un trapezio rettilineo, essendo Mm una linea retta, perchè la curva si confonde colla tangente. Ora $PMmp$ è uguale a $Pp \times pr + Mr \times \frac{mr}{2}$. Dunque si avrà

$$PMmp = ydx + dx \times \frac{1}{2} dy,$$

ma $dx \times \frac{1}{2} dy$ è un infinitesimo del secondo ordine, che deve svanire in confronto dell' infinitesimo ydx di primo ordine; dunque sarà solamente

$PMmp = ydx$, la quale espressione è la differenziale dell area delle curve.

Trovare la differenziale dell' area delle curve, senza il soccorso del principio degli infinitesimi.

33. L' area d' una curva o la grandezza dello spazio *ADMP* (fig. 3) compreso tra gli assi *AB*, *AC*, l' arco *DM*, e l' ordinata *PM* dev' essere, come abbiamo detto riguardo all' arco, una funzione dell' ascissa *AP*, o dell' ordinata *PM*, e se ne troverà la differenziale con un metodo analogo a quello che abbiamo impiegato per avere la differenziale dell' arco. Se si rappresenta per s questa funzione, s diverrà

$$s + s'\frac{dx}{1} + s''\frac{dx^2}{1.2} + s'''\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

quando x si cambierà in $x + dx$, rappresentando per

s', s'', s''' ec. i coefficienti differenziali $\frac{ds}{dx}$, $\frac{d^2s}{dx^2}$, $\frac{d^3s}{dx^3}$ ec.

Dunque l' espressione dello spazio *PMomp* sarà rappresentato dalla serie

$$s'\frac{dx}{1} + s''\frac{dx^2}{1.2} + s'''\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Ora egli è facile il vedere che questo spazio è più grande del rettangolo inscritto *PMQp* che ha per espressione

$$Pp \times PM = y\,dx$$

e più piccolo del rettangolo circonscritto *PRmp* che ha

per espressione

$$Pp \times pm = dx \left(y + y' \frac{dx}{1} + y'' \frac{dx^2}{1.2} + y''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.} \right)$$

Si avranno dunque le tre serie seguenti

$$y\,dx$$

$$s' \frac{dx}{1} + s'' \frac{dx^2}{1.2} + s''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

$$y\,dx + y'\,dx^2 + y'' \frac{dx^3}{1.2} + \text{ec.}$$

delle quali la seconda sarà compresa tra la prima e la terza. Ma queste ultime hanno il medesimo primo termine $y\,dx$. Dunque sarà (num. 5)

$s' = y$, e rimettendo in luogo di s' il coefficiente differenziale $\frac{ds}{dx}$, ch'esso rappresenta,

$$\frac{ds}{dx} = y, \text{ e quindi } ds = y\,dx.$$

Confronto dei precedenti due metodi, e quindi spiegazione del principio degli infinitesimi per trovare le differenziali delle aree delle curve.

34. Dietro alle esatte definizioni del Calcolo differenziale (num. *6* e segg.) prendere la differenziale dell'area $ADMP$ (fig. 3) non è prendere tutto lo spazio $PMmp$

corrispondente all' aumento Pp dell' ascissa AP, ma è prendere solamente il primo termine di quest' accrescimento ordinato secondo le potenze di dx, cioè il termine ch' è moltiplicato per la semplice dx. Ora, noi abbiamo veduto nel metodo di Lagrange che cotesto primo termine essendo

$$s' dx = \frac{ds}{dx} dx$$

esso è eguale a ydx, e che quindi si ha $ds = ydx$; ed abbiamo pure veduto che ciò è perchè dx fu preso tale che i primi termini delle serie che rappresentano i tre spazj $PRmp$, $PMomp$, $PMQp$ sono ciascuno maggiore della somma dei termini seguenti, e vedemmo infine che ciò avrebbe sempre più luogo, se dx fosse preso minore di qualunque data. Dunque potremmo dire, che preso Mm (fig. 1) infinitesimo (considerando sempre l' espressione infinitesimo come espressione equivalente a quella di quantità minore di qualunque data) il primo termine dello spazio $PMmp$, o la differenziale dell' area della curva SMR è ydx. Risulta da ciò, che il valore

del triangolo $Mmr = \frac{1}{2} dy.dx$ non si trascura effettivamente in quanto che come infinitesimo di secondo ordine debba svanire in confronto d' un infinitesimo di primo ordine, ma si omette perchè non si tratta che di prendere il primo termine.

Notisi che nel metodo di Lagrange (fig. 3) non fa-

cendo coincidere *Mom* con *MN*, lo ſpazio *PMomp* rappreſenta tutto l'accreſcimento dell'area della curva, ovvero tutta la ſerie

$$s' dx + s'' \frac{dx^2}{1.2} + s''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

nella quale eſſendo $s' dx = y dx = PMQp$, la ſomma degli altri termini dopo il primo è rappreſentata dallo ſpazio *MomQ*. Ma col principio degli infiniteſimi, facendo coincidere l'arco colla tangente, il ſuddetto ſpazio viene ridotto al triangolo rettilineo *Mmr* (fig. 1), e quindi queſto triangolo rappreſenta il reſto dei termini dopo il primo della ſerie che eſprimono l'aumento dello ſpazio. Dunque l'omiſſione di detto triangolo *Mmr* $= \frac{1}{2} dy . dx$ è l'omiſſione dei termini reſtanti dopo il primo; omiſſione che non è quindi appoggiata alla proprietà che hanno queſti termini reſtanti di eſſere preſi inſieme traſcurabili riſpetto al primo, ma dipende ſolo dalla circoſtanza che non occorre che il primo termine, eſſendo eſſo la differenziale cercata.

E' ſuperfluo il far vedere che dx dev'eſſere preſo minore di qualunque data. Vale anche in queſto caſo la ragione data alla ſpiegazione del metodo di trovare l'equazione della ſottotangente.

Valore del raggio osculatore trovato col principio degli infinitesimi.

35. L'arco infinitesimo Mm (fig. 4) tanto della curva che del cerchio potendosi riguardare come una linea retta che si confonde colla tangente, sarà Mm uguale ad una linea retta perpendicolare ad MC raggio del cerchio.

Sieno MP, mp due perpendicolari all' asse AP infinitamente vicine l' una all' altra, e CO, rm due parallele allo stesso asse: fatta $MO = u$, $AP = x$, $PM = y$; avremo $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, la quale equazione innalzata prima al quadrato, e poi differenziata darà $dxd^2x + dyd^2y = dsd^2s$. Ora pe' triangoli simili Mrm, MOC sarà

$$dx : ds :: u : MC = \frac{uds}{dx}$$: ma mentre AP, PM, MO

variano, MC non varia; dunque differenziando l' equazione

$$MC = \frac{uds}{dx}, \text{ verrà } o = \frac{(ud^2s + dsdu)dx - udsd^2x}{dx^2};$$

e poichè $du = Mr = dy$, si troverà $u = \dfrac{ds\,dx\,dy}{dsd^2x - dxd^2s}$;

e quindi $MC = \dfrac{ds^2dy}{dsd^2x - dxd^2s}$

$$= \frac{ds^3 dy}{ds^2 d^2x - dx(dx\,d^2x + dy\,d^2y)} = \frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$

$$= \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$ Suppoſta dx coſtante viene

$$MC = \frac{ds^3}{-dx\,d^2y} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y};$$ e dividendo

tutto per dx^3, $MC = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : -\frac{d^2y}{dx^2}$.

Valore del raggio oſculatore trovato ſenza il ſoccorſo degli infiniteſimi.

36. Se nella curva Mm, ſi fa $Mr = dx$ (fig. 5), abbiamo veduto che ſarà $mr = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3}$ ec.

Sia Mm' un cerchio, e la ſua equazione riportata agli aſſi Mr, rm' ſia $m'r = p\,dx + q\,dx^2$. Dico che ſe $p = \frac{dy}{dx}$, e $q = \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}$, Mm' è un cerchio che tocca la curva Mm, cioè è tale, che tra eſſo e la curva non ſi può condurre verun altro cerchio.

Sia $m''r = P\,dx + Q\,dx^2$ l'equazione d'un altro cerchio qualunque Mm'', sarà

$$mm' = mr - m'r = \left(\frac{dy}{dx} - p\right)dx$$

$$+ \left(\frac{d^2y}{1.2\,dx^2} - q\right)dx^2 + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.};$$

ed essendo per ipotesi $\frac{dy}{dx} = p$, e $q = \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}$, sarà

$$mm' = \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Sarà poi $m'm'' = m'r - m''r = (p-P)\,dx + (q-Q)\,dx^2$. Ora si potrà sempre prendere dx così piccolo (purchè non sia $p = P$, e $q = Q$, nel qual caso i due circoli coincidono) che $(p-P)\,dx + (q-Q)\,dx^2$ sia sempre maggiore di $\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{dx^3}{1.2.3} +$ ec. Dunque $m'm''$ sarà sempre maggiore di mm'; dunque tra la curva Mm, ed il cerchio Mm' non si può condurre nessun altro cerchio.

Queste proprietà che deve avere il cerchio osculatore servono a determinarlo, e quindi a trovare la grandezza del suo raggio.

Sieno a e b le coordinate del centro di questo cerchio riportate agli assi della curva, e sieno x ed y le

coordinate del punto M comuni alla curva ed al cerchio, e ſia finalmente R il raggio di queſto cerchio.

L' equazione al cerchio ſarà $R^2=(x-a)^2+(y-b)^2$ (1)
Avremo, differenziando queſta equazione, per la prima condizione che deve avere il cerchio oſculatore,

$$p=\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-a)}{y-b}, \text{ ovvero } (y-b)\frac{dy}{dx}+(x-a)=0 \ (2).$$

Per la ſeconda condizione poi differenziando di nuovo ſarà

$$q=\frac{1}{2}\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(y-b)^2+(x-a)^2}{2(y-b)^3}, \text{ ovvero}$$

$$(y-b)^3\frac{d^2y}{dx^2}+(y-b)^2+(x-a)^2=0 \ (3).$$

Le tre equazioni (1), (2), (3) riunite baſtano a determinare a, b, R. La ſeconda dà $(x-a)=-(y-b)\frac{dy}{dx}$; ſoſtituendo queſto valore nella terza ſi trova

$$y-b=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

da cui ſi trae $x-a=\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$. Soſtituite

queste espressioni nell' equazione (1), si ha

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} .$$

Confronto di questi metodi, e quindi spiegazione del primo.

37. Esaminato il metodo di Lagrange si vede che il cerchio è osculatore, perchè nella sua equazione (fig. 5)

$m'r = p\,dx + q\,dx^2$ si è preso $p = \frac{dy}{dx}$, e $q = \frac{d^2y}{2.dx^2}$,

e perchè si può prendere dx tale che un termine sia maggiore di tutti gli altri. Si vede poi facilmente che ciò è tanto più vero, cioè tanto più è vero che esso è un cerchio osculatore, quanto più dx si può prendere più piccolo di ciò ch'è necessario per ottenere la suindicata condizione. Ciò posto con le suddette due equazioni

$p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2}{2dx^2}$ si trovano le coordinate del centro, e si determina il valore del raggio.

Nel metodo di Leibnizio si fa precisamente lo stesso. In fatti l' equazione di Lagrange $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{y-b}$ è la

stessa cosa che l' equazione $MC = u\frac{ds}{dx}$ di Leibnizio.

L'una e l'altra si trova differenziando l'equazione del cerchio. Solamente Leibnizio prendendo subito dx minore di qualunque quantità data, cioè sottintendendo la proposizione del numero terzo, fa col fatto quello che Lagrange dice che potendo farsi rende il circolo osculatore. Il fare poi dx minore di qualunque data, lo conduce alla sostituzione di ds^2 in luogo di $dx^2 + dy^2$, il che non vuol dire altro, come abbiamo veduto, se non che il primo termine della riduzione in serie dell' arco è eguale alla tangente corrispondente, quando dx è tale che il primo termine è maggiore della somma degli altri, e tanto più quando dx è minore di qualunque quantità data. Ecco come si vede l'identità delle suddette due formole $\frac{dv}{dx} = \frac{-(x-a)}{y-b}$, e $MC = \frac{u\,ds}{dx}$, colla sola differenza della sostituzione nella seconda di ds^2 invece di $dx^2 + dy^2$, per aver fatto confondere il piccolo arco della curva colla tangente, ossia per aver considerato l'arco infinitesimo una linea retta. L'equazione di Lagrange dà la seguente proporzione

$dy : dx :: -(x-a) : (y-b)$ la quale diventa

$dy^2 + dx^2 : dx^2 :: (x-a)^2 + (y-b)^2 : (y-b)^2$;

e sostituendo il valore di $dy^2 + dx^2$ dietro all' ipotesi di Leibnizio, e quello di $(x-a)^2 + (y-b)^2$, ed estraendo la radice quadrata si avrà

$ds : dx :: R : y - b$, e quindi $R = (y-b)\frac{ds}{dx}$,

equazione identica con quella di Leibnizio $MC = u\frac{ds}{dx}$,

essendo (fig. 4) $MC = R$, ed $u = y - b = MP - CF = MO$.

Il resto è precisamente lo stesso in amendue i metodi. Non si fa infatti che differenziare un' altra volta nel metodo di Leibnizio l'equazione $MC = u\frac{ds}{dx}$, ed in quello

di Lagrange l'equazione $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{y-b}$, e noi abbiamo veduto che queste equazioni sono identiche, meno la differenza, soltanto apparente, che proviene dall' ipotesi ammessa da Leibnizio, dietro al principio degli *infinitesimi*, che un arco infinitamente piccolo è eguale ad una linea retta, particolarità che abbiamo d'altronde più volte spiegata.

Nota. Avressimo potuto continuare a confrontare i varj metodi impiegati per ispiegare le altre proprietà delle curve, ed avressimo pure potuto confrontare i due metodi nelle loro applicazioni a molte quistioni di Fisica. Ma quello che abbiamo detto ci parve sufficiente per mettere in istato i lettori, che non supponiamo di già nuovi in questa scienza, di continuare da loro stessi i confronti.

CONCLUSIONE GENERALE.

38. Il Calcolo differenziale si può dividere in due parti distinte. La prima comprende le regole pratiche per formare le varie differenziali successive d'una funzione qualunque. La seconda tratta delle applicazioni di queste regole alla soluzione di vari problemi, o alla dimostrazione di differenti teoremi.

Quanto alle regole pratiche il principio degli infinitesimi è impiegato per isvolgere in serie le varie funzioni e particolarmente le trascendenti. Dai confronti che facemmo dei due metodi differenti per ridurre in serie qualunque funzione, possiamo conchiudere che la quantità infinita e la quantità infinitesima non sono che una medesima quantità indeterminata che serve a fare due operazioni contrarie. I termini che sembrano svanire dietro ai principj stabiliti dell'infinito e dell'infinitesimo, per i quali principj svaniscono gli infiniti d'ordini inferiori in confronto d'un infinito d'ordine superiore, oppure, svaniscono gli infinitesimi d'ordini superiori in confronto d'un infinitesimo d'ordine inferiore, svaniscono unicamente perchè contengono quantità indeterminate e sussidiarie, che non devono punto sussistere alla fine del Calcolo.

Pare che il principio degli infinitesimi entri di nuovo per determinare o deffinire le differenziali, in quanto che si dice, che per trovare, per esempio, la differenziale prima, bisogna mettere $x+dx$ in luogo di x nella

funzione $f(x)$, e poi confiderare come nulli i termini che contengono delle potenze maggiori di dx, come infinitefimi d'ordini fuperiori; quello che refta, meno la funzione primitiva, forma la differenziale prima. In quefto cafo il principio degli infinitefimi è affatto fuperfluo. Le noftre deffinizioni del Calcolo differenziale (num. 6 e fegg.) moftrano che la grandezza o picciolezza di dx è indifferente.

Le varie differenziali d'una funzione non fono che i vari termini d'una ferie ordinata fecondo le potenze dell'accrefcimento della variabile, qualunque fia quefto accrefcimento.

I principj che concernono le regole pratiche per formare le differenziali fucceffive non dipendono che dai puri principj delle derivazioni.

Quanto all'applicazione delle regole pratiche alla foluzione di differenti problemi: 1.° ci fono dei cafi nei quali la piccolezza, grandezza o natura dell'accrefcimento della variabile è affatto indifferente, come nel metodo per trovare i valori delle frazioni, le quali per certi valori particolari della variabile fi riducono alla forma di $\frac{0}{0}$. In quefti cafi poffiamo conchiudere effere del tutto fuperfluo il principio degli infinitefimi. 2.° Ci fono dei cafi nei quali i rifultati fono tanto più efatti quanto più piccolo è il valore dell'accrefcimento della variabile, e che in confeguenza giungono, per così dire, al maffimo dell'efattezza, quando l'accrefcimento della variabile è minore di qualunque quantità data; fono di quefto genere il metodo dei maffimi e dei minimi, e le proprietà delle curve che noi

abbiamo paſſate in reviſta. Queſto genere di quiſtioni dipende dalla propoſizione da noi dimoſtratta (num. 3) per cui in una ſerie qualunque ordinata ſecondo le potenze d'una quàntità ſi può ſempre prendere queſta quantità tale che renda un termine maggiore della ſomma di tutti quelli che lo ſeguono. Nel metodo degli infiniteſimi queſta propoſizione è aſſolutamente ſottinteſa. Baſta richiamarla e ſoſtituire all'eſpreſſione di quantità infiniteſima quella di quantità minore di qualunque data, e quei riſultati vengono dimoſtrati col più grande rigore.

IL FINE.

INDICE

INTRODUZIONE

FUNZIONI CIRCOLARI.

USI ANALITICI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA TEORIA DELLE CURVE.

Fine dell' Indice.